

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE  
FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI  
CORSO DI LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA



A. A. 2005/06



SCUOLA INTERNAZIONALE SUPERIORE DI STUDI AVANZATI  
SETTORE DI ANALISI FUNZIONALE E APPLICAZIONI

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

# SULLA DISSIPAZIONE DI ENTROPIA PER LEGGI DI CONSERVAZIONE

CANDIDATA  
LAURA CARAVENNA

RELATORE  
PROF. STEFANO BIANCHINI



*Ai miei cari*



SULLA DISSIPAZIONE DI ENTROPIA PER  
LEGGI DI CONSERVAZIONE



# Introduzione

In natura si presentano diverse situazioni in cui si ha una quantità conservata; si intende con questo che la variazione di tale quantità presente in una regione è pari al suo flusso attraverso la frontiera. Matematicamente questo viene formalizzato imponendo che una funzione, rappresentante la densità della quantità considerata, soddisfi un'equazione differenziale in forma di divergenza: evidenziando la variabile temporale avremo

$$u_t + \operatorname{div} f(u) = 0.$$

Questa formulazione è semplice e ormai classica, ciononostante ancora interessante: vi rientrano infatti diversi modelli tutt'oggi importanti, per esempio il modello di Eulero, il  $p$ -sistema, le equazioni della magnetoidrodinamica, l'equazione di Burgers, i modelli di traffico. In questo ambito rimangono problemi rilevanti, principalmente in più dimensioni, ma questi sono di entità tale da sembrare attualmente insormontabili. È invece ormai sostanzialmente risolto il caso unidimensionale, in cui restano tuttavia delle questioni da chiarire. Quest'ultimo è l'ambito in cui si svolge la presente tesi.

Le soluzioni di una legge di conservazione non sono regolari: è infatti noto che si possono sviluppare discontinuità in tempo finito. Questo non è dovuto a una cattiva modellizzazione ma è un problema intrinseco: per esempio, considerando il flusso di macchine lungo un'autostrada, il passaggio da un tratto a traffico scorrevole a uno dove si è in coda corrisponde a una discontinuità. Abbiamo allora bisogno di considerare soluzioni deboli e nel caso scalare risulta naturale cercare le soluzioni nello spazio delle funzioni a variazione limitata: imporremo che esse risolvano l'equazione in senso distribuzionale.

Quando passiamo a considerare soluzioni deboli viene meno tuttavia l'unicità. Per ovviare a questo problema si impongono condizioni aggiuntive: una condizione comunemente adottata, che garantisce nel caso di una legge scalare buona positura, è richiedere che sia

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0 \quad \text{in senso distribuzionale in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$$

per ogni coppia entropia-flusso di entropia, cioè per ogni funzione convessa  $\eta$  e per ogni  $q$  tale che sia  $q' = \eta' f'$ . Questa condizione è naturale alla luce del fatto che nei fenomeni fisici modellizzati si ha una funzione, l'entropia fisica, che per il secondo principio della termodinamica deve essere monotona nel tempo: la disuguaglianza sopra è la richiesta che la soluzione fisica dissipi. Nei modelli tuttavia si ha una sola entropia: sarebbe ancora più naturale allora avere che la dissipazione di una sola entropia fosse sufficiente a caratterizzare la soluzione; questo è vero sotto l'ipotesi di convessità del flusso ([7], [21]), ma non in generale.

Rimane da chiedersi se non sia possibile caratterizzare la soluzione imponendo un'altra condizione, più forte, che coinvolga una sola entropia. Nel caso molto particolare di un problema di Riemann la risposta è affermativa: viene dimostrato in [6], Cap. 9.7, come, per quanto non basti imporre che la soluzione dissipi, è sufficiente richiedere che essa massimizzi la dissipazione rispetto a una sola entropia. Viene inoltre mostrato come questa condizione si traduce in tal caso nella più elementare e classica *condizione della corda* proposta da Oleinik: si richiede che in corrispondenza di ogni salto approssimato  $u^-, u^+$  il grafico di  $f$  rimanga sopra (risp. sotto) la sua corda tra  $u^-$  e  $u^+$ , se  $u^- < u^+$  (risp.  $u^- > u^+$ ). Nella seconda parte di questa tesi vogliamo estendere questo risultato. Da un lato mostriamo che, per soluzioni con struttura BV che soddisfino inoltre un'altra debole ipotesi di regolarità, imporre la condizione della corda in ogni punto di salto approssimato è sufficiente ad individuare la soluzione 'giusta'; in [3], Cap. 9.3, viene già data una dimostrazione analoga, ma con un'ipotesi più forte. Dall'altro lato si mostra per dati iniziali a variazione limitata, anche se per ora con ipotesi aggiuntive, che la condizione della corda si può interpretare come condizione di massima dissipazione, relativamente a una sola entropia strettamente convessa.



---

La situazione è più complicata quando si considerano sistemi di leggi di conservazione. Abbiamo risultati di buona positura, per una classe di sistemi, solo per dati iniziali BV a variazione limitata piccola ([3]). In questa dimostrazione è di fondamentale importanza l'uso di un funzionale, il funzionale di Glimm, introdotto matematicamente come misura delle interazioni che le onde presenti all'istante  $t$  avranno nell'intervallo  $(t, +\infty)$ , ma dal significato intrinseco poco chiaro. Non abbiamo invece una teoria generale di buona positura per i sistemi di leggi di conservazione basata sull'uso dell'entropia, che risulta invece importante per diverse equazioni in più variabili spaziali, come nelle equazioni di Boltzmann ([20], Cap. 9).

Nella prima parte di questa tesi mostriamo che la dissipazione istantanea di entropia, nel caso di una legge di conservazione scalare, può essere usata come funzionale di interazione. Diversamente dal funzionale di Glimm, tuttavia, ha senso anche in più dimensioni e potrebbe prestarsi ad essere una sua estensione.

La Tesi è organizzata come segue:

- Capitolo 1. Si introducono le notazioni e vengono richiamati dei prerequisiti per quanto presentato nel seguito. Si considerano le funzioni a variazione limitata, in una e più variabili, e si accenna alla teoria classica prima sulle leggi di conservazione, poi su una particolare equazione di Hamilton-Jacobi.
- Capitolo 2. Si costruisce un funzionale,  $\mathcal{D}$ , prima in modo geometrico, poi analiticamente a partire dalla dissipazione di entropia. Si mostra quindi che questo è analogo al funzionale di Glimm: sommando la variazione totale, con un giusto peso, si ottiene infatti un funzionale definito su un limitato di BV e semicontinuo per convergenza  $L^1_{\text{loc}}$ ; questo, quando valutato sulle soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare, fornisce un funzionale di Lyapunov, è cioè un funzionale decrescente lungo il flusso.
- Capitolo 3. Assumendo una struttura BV, si caratterizza la soluzione entropica di un problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare come quella che soddisfa *la condizione della corda* nei punti di salto

approssimato, assumendo anche un'ipotesi aggiuntiva di regolarità tuttavia più debole di quelle corrispondenti assunte nell'analogia dimostrazione ([3], Cap. 9.3). Si chiarisce quindi, illustrandolo sotto particolari ipotesi, quale sia l'estensione della condizione data nel caso di un problema di Riemann da Dafermos. Ai fini della dimostrazione si evidenzia la corrispondenza tra soluzioni di una legge di conservazione scalare e soluzioni della relativa equazione di Hamilton-Jacobi.

# Indice

<b>Introduzione</b>	<b>i</b>
<b>1 Nozioni preliminari</b>	<b>3</b>
1.1 Notazioni . . . . .	4
1.2 Lo spazio BV . . . . .	5
1.2.1 Distribuzioni, misure . . . . .	6
1.2.2 Funzioni BV di una variabile . . . . .	9
1.2.3 Funzioni BV di più variabili . . . . .	14
1.3 Involuppo concavo e convesso di una funzione . . . . .	17
1.4 Legge di conservazione scalare . . . . .	18
1.4.1 Generalità . . . . .	18
1.4.2 Soluzione con il metodo del <i>wave-front tracking</i> . . . . .	27
1.5 Equazione di Hamilton-Jacobi . . . . .	32
<b>2 La dissipazione e il funzionale di Glimm</b>	<b>37</b>
2.1 Il funzionale di Glimm: $Q$ . . . . .	40
2.2 $\mathcal{D}$ : la dissipazione di entropia istantanea . . . . .	41
2.2.1 Definizione geometrica . . . . .	42
2.2.2 Definizione analitica . . . . .	43
2.2.3 Confronto tra $\mathcal{D}$ e $Q$ : un esempio . . . . .	50
2.3 Funzionale di Glimm: $\mathcal{D}$ nel ruolo di $Q$ . . . . .	51
2.3.1 Stime su $\mathcal{D}$ . . . . .	52
2.3.2 $\mathcal{E}_{f,T}$ come funzionale di Liapunov . . . . .	60

<b>3</b>	<b>La condizione di massima dissipazione</b>	<b>73</b>
3.1	Hamilton-Jacobi, legge di conservazione . . . . .	75
3.2	Sulla condizione della corda . . . . .	82
3.3	Caratterizzazione della soluzione entropica . . . . .	83
	<b>Bibliografia</b>	<b>98</b>

# Capitolo 1

## Nozioni preliminari

Nel presente capitolo si fissano le notazioni, vengono richiamate varie definizioni e raccolti alcuni risultati a cui si farà riferimento nei prossimi capitoli.

Nella Sezione 1.1 si dichiarano alcune convenzioni e notazioni in seguito tacitamente adottate.

Nella Sezione 1.2 si introduce lo spazio delle funzioni a variazione limitata. Questo spazio include spazi di funzioni più regolari, tra cui  $W^{1,1}$ , ma ha il vantaggio di contenere anche molte funzioni regolari solo a tratti. Questa caratteristica risulterà importante nel seguito, quando si dovranno considerare soluzioni discontinue di un'equazione differenziale alle derivate parziali. Nella Sezione 1.2.1 si richiamano elementi di teoria della misura legati alla definizione di tale spazio. Nella Sezione 1.2.2 si presenta il caso particolare di funzioni di una variabile reale. In questa situazione si può dare una definizione di variazione totale che dipende dai valori puntuali della funzione; si mostra poi come questa sia sostanzialmente equivalente a una definizione per funzioni  $L^1$  in cui si richiede che la derivata distribuzionale sia una misura di Radon. Questa è la definizione che si estende a funzioni di più variabili reali, caso considerato nella Sezione 1.2.3; qui si enunciano inoltre risultati rilevanti a cui si farà riferimento nei prossimi capitoli, in particolare la formula di Volpert.

Nella Sezione 1.4 si presenta una legge di conservazione scalare e il rispettivo problema di Cauchy. Si evidenzia come anche per flussi e dati iniziali molto regolari non vi sia in generale una soluzione regolare per tutti i tempi.

Da qui la necessità di considerare soluzioni che risolvano l'equazione in senso distribuzionale. Questa nozione di soluzione tuttavia risulta insufficiente a garantire l'unicità, che si ottiene imponendo condizioni aggiuntive. Per una legge di conservazione scalare ci sono diverse scelte equivalenti; la condizione di entropia è quella attualmente preferita in quanto richiede poche ipotesi sul flusso e si generalizza al caso dei sistemi, pur non avendo ancora in questa situazione risultati completi di buona positura del problema. Nella Sezione 1.4.2 viene poi presentato un metodo per costruire la soluzione entropica di un problema di Cauchy come limite di approssimanti costanti a tratti: il metodo del *wave-front tracking*.

Nella Sezione 1.5 si presenta l'equazione di Hamilton-Jacobi. Questa è strettamente legata all'equazione di una legge di conservazione scalare: la prima si può pensare come l'equazione risolta da una primitiva di una soluzione della seconda. Si illustra come per questa equazione si abbiano problemi relativi ad esistenza e unicità del problema di Cauchy analoghi a quelli sopra descritti per una legge di conservazione e si arriva quindi alla definizione di soluzione di viscosità. Per la soluzione di viscosità vale il principio del massimo. Si riporta infine un teorema di approssimazione che risulterà utile per dimostrare nel Capitolo 3.

## 1.1 Notazioni

Si adottano le seguenti convenzioni:

- $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \pm\infty$ .
- $\chi_K$  è la funzione caratteristica di un insieme  $K$ :

$$\chi_K(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in K, \\ 0 & \text{se } x \notin K \end{cases}.$$

- $\text{sgn}(x) = \chi_{\{x>0\}} - \chi_{\{x<0\}}$ .
- $[x]^+ = x\chi_{\{x\geq 0\}}$ ,  $[x]^- = -x\chi_{\{x<0\}}$ .

- $\text{Supp}(u) = \overline{\bigcap_{k \in \mathbb{N}} \chi_{\{|u| \leq k\}}}$ . Per funzioni  $L^1$  il supporto è definito a meno di un insieme di misura nulla.
- Indicheremo con un pedice  $c$  gli spazi di funzioni a supporto compatto:  $C_c^0, C_c^1, \dots$
- $BV_1 = \{u \in BV : \text{TV}(u) \leq 1\}$ .
- $L_1^\infty = \{u \in L^\infty : u \leq 1 \text{ quasi ovunque}\}$ .
- $\text{Lip}_L$  indicherà le funzioni lipschitziane di costante di Lipschitz  $\leq L$ .
- $\mathcal{M}$  indicherà lo spazio delle misure di Radon.
- $\mathcal{L}^n$  indicherà la misura di Lebesgue  $n$ -dimensionale.
- $\mathcal{H}^n$  indicherà la misura di Hausdorff  $n$ -dimensionale.
- $\rightrightarrows$  indicherà convergenza uniforme.
- $\rightharpoonup$  indicherà convergenza debole.
- $u^+ = u(x^+) = \lim_{x_k \downarrow x} u(x_k)$ , analogamente  $u^- = u(x^-) = \lim_{x_k \uparrow x} u(x_k)$ .
- Quando si considereranno valori puntuali di funzioni a variazione limitata di variabile reale, si supporrà la funzione continua da destra: usando la notazione  $u^+ = u(x^+) := \lim_{x_k \downarrow x} u(x_k)$  avremo  $u(x) := u(x^+)$ .
- $o(\varepsilon)$  è una funzione  $u$  tale che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} u = 0$ .
- $o_{\varepsilon(1)}$  è una funzione  $u$  tale che  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u = 0$ .
- $\mathcal{D}, \mu, \mathcal{E}_{f,T}, \mathcal{A}$  sono funzioni che definiremo nel Capitolo 2.

## 1.2 Lo spazio BV

Per la Sezione 1.2.1 si fa riferimento ai testi [13], [17], [8], per la Sezione 1.2.2 ai testi [13], [14], per la Sezione 1.2.3 ai testi [13].

### 1.2.1 Distribuzioni, misure

Sia  $X$  un insieme non vuoto. Una  $\sigma$ -algebra su  $X$  è un sottoinsieme  $\Sigma$  dell'insieme delle parti di  $X$  tale che

- $\emptyset \in \Sigma$ ;
- $\forall Y \in \Sigma$  abbiamo che  $X \setminus Y \in \Sigma$ ;
- $\forall \{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  abbiamo che  $\cup_{k \in \mathbb{N}} Y_k \in \Sigma$ .

La coppia  $(X, \Sigma)$  viene detta *spazio misurabile*. Gli elementi di una  $\sigma$ -algebra vengono detti *misurabili*. A uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si associa la  $\sigma$ -algebra dei borelliani,  $\mathcal{B}(X)$ , definita come la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene  $\tau$ ; essa è l'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algre che contengono  $\tau$ , fra cui  $\Sigma$ .

Dato uno spazio misurabile  $(X, \Sigma)$  si definisce *misura positiva* una funzione  $\mu : \Sigma \rightarrow [0, +\infty]$  tale che

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- $\forall \{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  con  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  per  $i \neq j$  abbiamo  $\mu(\cup_k Y_k) = \sum_k \mu(Y_k)$ ;
- $\forall Y_1, Y_2 \in \Sigma$ , se  $Y_1 \subset Y_2$  abbiamo che  $\mu(Y_1) \leq \mu(Y_2)$ .

Diciamo  $\mu$  *finita* se  $\mu(X) < \infty$ . Diciamo  $\mu$   $\sigma$ -*finita* se  $X$  è unione numerabile di sottoinsiemi di misura finita. Se abbiamo uno spazio topologico  $(X, \tau)$  diremo *misura di Radon positiva* una misura definita sulla  $\sigma$ -algebra dei borelliani tale che sia finita sui compatti.

Dato uno spazio misurabile  $(X, \Sigma)$  definiamo *misura reale* una funzione  $\mu : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$  tale che

- $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- $\forall \{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \Sigma$  con  $Y_i \cap Y_j = \emptyset$  per  $i \neq j$  abbiamo  $\mu(\cup_k Y_k) = \sum_k \mu(Y_k)$ .

Diciamo *misura vettoriale* una  $m$ -upla di misure reali; quanto si ha nel caso di misure reali si estende a misure vettoriali ragionando componente per componente. Dato uno spazio topologico  $(X, \tau)$  si definisce *misura di Radon* una



funzione definita sui borelliani relativamente compatti tale che  $\forall K \subset X$  compatto essa sia una misura su  $(K, \mathcal{B}(K))$ ; se inoltre è una misura su  $(X, \mathcal{B}(X))$  diciamo che è una *misura di Radon finita*. Indicheremo con  $\mathcal{M}(X)$  le misure di Radon finite su  $(X, \tau)$ , con  $\mathcal{M}_{loc}(X)$  le misure di Radon.

Data una misura reale  $\mu$  su  $(X, \Sigma)$  chiamiamo *variazione totale* di  $\mu$ , la misura positiva così definita, indicata con  $|\mu|$ :

$$|\mu|(Y) := \sup \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} |\mu(Y_h)| : Y = \cup_h Y_h, Y_h \cap Y_k = \emptyset \text{ per } h \neq k \right\}.$$

Definiamo poi la *parte positiva* e la *parte negativa* di  $\mu$  rispettivamente come

$$\mu^+ := \frac{|\mu| + \mu}{2} \qquad \mu^- := \frac{|\mu| - \mu}{2}.$$

Abbiamo allora la *decomposizione di Jordan*

$$\mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Sia dato uno spazio di misura  $(X, \Sigma)$  e su questo una misura positiva  $\mu$ . Una misura reale  $\nu$  si dice *assolutamente continua* rispetto a  $\mu$  se per ogni misurabile  $B$  con  $\mu(B) = 0$  è anche  $\nu(B) = 0$ . Si vede che  $\nu$  è assolutamente continua rispetto a  $\mu$  se e solo se  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  t.c. per ogni  $Y \in \Sigma$  con  $\mu(Y) < \delta$  si ha  $\nu(Y) < \varepsilon$ . Due misure positive  $\mu, \nu$  si dicono invece *mutuamente singolari* se esiste un misurabile  $Y$  per cui si abbia che  $|\mu|(Y) = 0$  e  $\nu(X \setminus Y) = 0$ ; due misure reali si definiscono mutuamente singolari se lo sono le loro variazioni totali.

Si ricorda che se si assegna una misura su uno spazio misurabile si può sviluppare la teoria dell'integrazione ([13], Definizione 1.14).

**Teorema 1.2.1 (Radon-Nikodým)** *Sia  $\mu$  una misura positiva e  $\sigma$ -finita su uno spazio misurabile; su questo sia data anche una misura reale  $\nu$ . Allora c'è un'unica coppia di misure reali  $\nu^a, \nu^s$  con  $\nu^a$  assolutamente continua rispetto a  $\mu$ ,  $\nu^s$  singolare rispetto a  $\mu$  e  $\nu = \nu^a + \nu^s$ . Inoltre c'è un'unica funzione  $f \in L^1(X, |\mu|)$  tale che sia  $\nu^a(Y) = \int_Y f d\mu$ ; chiameremo  $f$  densità di  $\nu$  rispetto a  $\mu$ .*

Le misure di Radon sono fortemente legate al duale di  $C_c^0$ . Data una misura di Radon  $\mu$ , comunque scelto un aperto  $\Omega$  contenuto in un compatto di  $X$ , le possiamo infatti associare il funzionale lineare e continuo su  $C_c^0(\Omega)$  dato da

$$T_\mu f := \int_X f \, d\mu \quad \forall f \in C_c^0(\Omega).$$

Si noti che  $|T_\mu f|_\infty \leq \|f\|_\infty \mu(\text{Supp } f) \leq \|f\|_\infty \mu(\Omega)$ . Se la misura  $\mu$  è finita questo funzionale risulta continuo su  $C_c^0(\Omega) \forall \Omega$  aperto di  $X$ . Vale poi il teorema di rappresentazione di Riesz.

**Teorema 1.2.2 (Riesz)** *Sia  $X$  uno spazio metrico compatto e separabile. Supponiamo che il funzionale  $T : C_c^0(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  sia lineare e continuo. Allora esiste una unica misura di Radon  $\mu$  su  $X$  tale che sia  $Tf = \int_\Omega f \, d\mu$ . Per ogni aperto  $U \subset\subset X$  si ha*

$$\mu(U) = \sup_{\phi \in C_c^0(U), \|\phi\|_\infty \leq 1} |T\phi|.$$

**Osservazione 1.2.3** *L'enunciato vale anche se  $X$  è solo localmente compatto, con  $T$  definito sul completamento di  $C_c^0(\Omega)$ , con  $\|\cdot\|_\infty$  ([13], Teorema 1.54).*

**Definizione 1.2.4** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto. Definiamo  $\mathcal{D}(\Omega)$  lo spazio vettoriale  $C_c^\infty(\Omega)$  munito della topologia con le seguenti successioni convergenti:*

$$\phi_n \rightarrow \phi \iff \begin{cases} \exists K \subset\subset \Omega : \text{Supp } \phi_n \subset K \quad \forall n, \\ \phi_n^{(k)} \xrightarrow{C^0} \phi^{(k)} \quad \forall k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

*Definiamo distribuzione un elemento del duale di questo spazio vettoriale topologico, che indicheremo con  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .*

Osserviamo che una misura è una distribuzione, usando la rappresentazione sopra descritta. Non vale il viceversa: l'applicazione  $\bar{T} : \phi \in C_c^\infty((-1, 1)) \rightarrow \phi'(0)$  è una distribuzione ma non una misura. Si ha la seguente caratterizzazione, applicazione del teorema di Riesz:

**Teorema 1.2.5** *Sia  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aperto. Una distribuzione è una misura se e solo se è continua su  $C_c^\infty(\Omega)$  con la norma indotta da  $C^0(\Omega)$ .*

**Osservazione 1.2.6** *Vale inoltre che una distribuzione positiva è una misura di Radon ([17], pag. 29, Teorema V).*

Ricordiamo la definizione di *derivata* di una distribuzione  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  con  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ : la  $k$ -esima derivata di  $T$ ,  $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ , per  $k = 1, \dots, n$  è definita da

$$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\phi) := -T\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\right) \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega).$$

Se la distribuzione proviene da una funzione regolare, i.e.  $T(\phi) = \int_\Omega f\phi$  con  $f \in C^1(\Omega)$ , allora questo non esprime altro che la regola di integrazione per parti. Se si considera la distribuzione associata alla funzione di Heaviside  $H = \chi_{\mathbb{R}^+}$  si ha che  $H'(\phi) = \phi(0)$ , la ‘delta di Dirac’,  $H''(\phi) = -\bar{T}(\phi) = -\phi'(0)$  e più in generale  $H^{(n)}(\phi) = (-1)^{n-1}\phi^{(n-1)}(0)$ . In particolare le derivate distribuzionali di misure rimangono distribuzioni ma non sono in generale misure.

**Definizione 1.2.7** *Sia data una misura  $\mu$  su uno spazio prodotto  $X_1 \times X_2$ . Dato un misurabile  $Y$  di  $X_1$  poniamo*

$$\mu_1(Y) := \mu(Y \times X_2).$$

*Viene così definita una misura su  $X_1$ , che chiamiamo  $x_1$ -marginale. Definiamo in modo analogo la  $x_2$ -marginale come  $\mu_2(Y) = \mu(X_1 \times Y)$  per ogni misurabile  $Y$  di  $X_2$ .*

## 1.2.2 Funzioni BV di una variabile

Fissiamo qui l’attenzione sulle funzioni reali di variabile reale. Introduciamo ora due nozioni formalmente diverse di variazione totale, quella puntuale e quella essenziale, e osserviamo che con opportune precisazioni le potremo identificare. La prima definizione è molto concreta; la seconda ha il vantaggio di passare al quoziente per uguaglianza quasi ovunque e si generalizza inoltre per funzioni di più variabili.

**Variazione totale puntuale.** Sia  $I = [a, b]$  intervallo reale e sia  $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Scelta un partizione  $\Pi = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} = b\}$  poniamo

$$\begin{aligned} pV_{\Pi}^+(u; I) &:= \sum_{i=0}^n [u(x_{i+1}) - u(x_i)]^+ \\ pV_{\Pi}^-(u; I) &:= \sum_{i=0}^n [u(x_{i+1}) - u(x_i)]^- \\ pTV_{\Pi}(u; I) &:= pV_{\Pi}^+ + pV_{\Pi}^- = \sum_{i=0}^n |u(x_{i+1}) - u(x_i)|. \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.8** Definiamo rispettivamente variazione puntuale positiva, variazione puntuale negativa e **variazione totale puntuale** di  $u$  in  $I = [a, b]$  gli estremi superiori di queste quantità al variare della partizione  $\pi$ :

$$\begin{aligned} pV^+(u; I) &:= \sup_{\Pi} pV_{\Pi}^+(u; I) \\ pV^-(u; I) &:= \sup_{\Pi} pV_{\Pi}^-(u; I) \\ pTV(u; I) &:= \sup_{\Pi} pTV_{\Pi}(u; I) = \sup_{\substack{n, \\ a=x_0, x_{n+1}=b, \\ x_i < x_{i+1}}} \sum_{i=0}^n |u(x_{i+1}) - u(x_i)|. \end{aligned}$$

Su un intervallo aperto vengono definite come l'estremo superiore sugli intervalli chiusi contenuti:  $pTV(u; (a, b)) := \lim_{a_k \downarrow a^+, b_k \uparrow b^-} pTV(u; [a_k, b_k])$ . Su un aperto  $\Omega$  li definiamo come la somma dei valori assunti sulle componenti connesse  $I_k$  di  $\Omega$ :

$$pTV(u; \Omega) := \sum_k pTV(u; I_k) \quad \Omega = \cup_k I_k \quad I_k \text{ intervalli disgiunti.}$$

**Definizione 1.2.9** Diremo che  $u$  ha variazione totale puntuale limitata in un aperto  $\Omega$  quando  $pTV(u; \Omega) < \infty$ . Indicheremo con  $BV(\Omega)$  lo spazio delle funzioni a variazione totale puntuale limitata in  $\Omega$ .

Quando non creerà ambiguità ometteremo l'insieme su cui si calcola  $pTV$ . Riportiamo ora alcune proprietà dello spazio  $BV$ .

La variazione totale puntuale è inferiormente semicontinua rispetto alla convergenza puntuale, essendo l'estremo superiore di funzionali continui. Su

$BV([a, b])$  si può dare la norma  $\|u\|_{BV} := \|u\|_{L^1} + pTV(u)$ . Con questo risulta essere uno spazio di Banach. Si hanno le seguenti relazioni:

- Se in un intervallo  $u$  ha variazione puntuale totale finita, diciamo  $T$ , allora  $u$  è limitata e  $\sup u - \inf u \leq T$ .
- Se  $u$  è monotona, allora  $|u(b) - u(a)| = pTV(u; [a, b])$ . Detti  $x_i$  i punti di discontinuità di  $u$ , necessariamente numerabili, vale anche

$$|u(b) - u(a)| \geq \int_a^b |u'(x)| dx + \sum_i |u(x^+) - u(x^-)|.$$

La disuguaglianza può essere stretta, è un esempio la funzione di Cantor.

- Se  $u \in BV([a, b])$  senza essere monotona allora vale

$$u(b) - u(a) = pV^+(u) - pV^-(u)$$

ma questo valore non coincide con  $pTV(u) = pV^+(u) + pV^-(u)$ .

- Gli ultimi due punti dimostrano che  $u \in BV([a, b])$  se e solo se è differenza di due funzioni non decrescenti. Possiamo scegliere ad esempio  $u(a) + pV^+(u; (a, x))$  e  $pV^-(u; (a, x))$ .
- Dall'ultimo punto segue che  $u \in BV(\mathbb{R})$  è quasi ovunque derivabile con derivata integrabile.

Se modifichiamo una funzione anche solo in un punto la variazione totale puntuale può cambiare: funzioni uguali quasi ovunque possono quindi avere diversa variazione totale puntuale. Si ha tuttavia una nozione molto simile definibile su  $L^1$ : la variazione totale essenziale.

**Variazione totale essenziale.** Sia  $\Omega$  aperto reale e sia  $u \in L^1(\Omega)$ . Definiamo la *variazione totale essenziale* di  $u$  in  $\Omega$  come

$$eTV(u; \Omega) := \inf_{\tilde{u}} \{pTV(\tilde{u}; \Omega); \tilde{u} \text{ q.o. uguale a } u\}.$$

Servirà osservare che la variazione totale essenziale è inferiormente semi-continua rispetto alla convergenza  $L^1_{loc}$  (Lemma 1.2.15).

Si può dimostrare che la variazione totale essenziale di  $u$  coincide con la variazione totale puntuale di alcuni suoi rappresentanti. Uno di questi rappresentanti è il suo rappresentante continuo da destra. *Quando nel seguito di questa tesi considereremo una funzione  $L^1_{\text{loc}}$  a variazione totale essenziale limitata la identificheremo implicitamente con il suo rappresentante continuo da destra*: la sua variazione totale puntuale e la sua variazione totale essenziale coincideranno e saranno indicate semplicemente come **variazione totale**, TV.

È importante per il seguito il teorema che ora enunciamo ([13], Teorema 3.29):

**Teorema 1.2.10** *Sia  $(a, b)$  un intervallo reale limitato. La mappa lineare*

$$(c, \mu) \mapsto u(x) = c + \mu((a, x])$$

*realizza allora un isomorfismo tra gli spazi di Banach  $\mathbb{R} \times \mathcal{M}(a, b)$  e  $BV(a, b)$ , dove  $\mathcal{M}(a, b)$  sono le misure di Radon finite sull'intervallo  $(a, b)$ .*

L'isomorfismo inverso è allora dato da  $u \mapsto (\lim_{x \downarrow a} u(x), u_x)$ , dove con  $u_x$  si intende la derivata distribuzionale. La richiesta perché una funzione di  $L^1_{\text{loc}}$  sia in  $BV$  è dunque che la sua derivata distribuzionale sia una misura di Radon finita. Notiamo in particolare la relazione, considerando il rappresentante continuo da destra,

$$u(b) - u(a) = u_x((a, b]).$$

Questo si può considerare come il teorema fondamentale del calcolo in  $BV$ .

Per il teorema di Radon-Nikodým possiamo decomporre univocamente la misura  $u_x$  in una parte  $u_x^a$  assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e in una parte singolare  $u_x^s$ . La parte singolare si compone a sua volta di una parte atomica  $u_x^j$ , supportata da  $A := \{x : u_x(\{x\}) \neq 0\}$ , e della restante parte singolare ma non atomica  $u_x^c$ . Tutta la parte singolare è supportata da  $S := \{x : \lim_{r \downarrow 0} \frac{u_x(x-r, x+r)}{r} = \infty\}$ , di misura di Lebesgue nulla. Detto  $\Omega$  il dominio abbiamo quindi in modo univoco

$$u_x = u_{x\Omega \setminus S}^a + u_{xS \setminus A}^c + u_{xA}^j.$$

Diciamo *funzione di Cantor* una funzione continua con derivata quasi ovunque nulla, diciamo *funzione di salto* una funzione costante a tratti. Si ha il seguente teorema ([13], Corollario 3.33):

**Teorema 1.2.11** *Sia  $\Omega = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un intervallo limitato. Allora ogni  $u \in \text{BV}(\Omega)$  può essere rappresentato come  $u = u^a + u^c + u^j$  con  $u^a \in W^{1,1}(\Omega)$ ,  $u^j$  funzione di salto e  $u^c$  funzione di Cantor. Le tre funzioni sono univocamente determinate a meno di costanti additive e, scelto il rappresentante continuo da destra, vale*

$$\begin{aligned} |u_x|(\Omega) &= |u_x^a| + |u_x^j| + |u_x^c| \\ &= \int_a^b |u'| + \sum_{t \in A} |u(t^+) - u(t^-)| + |u_x^c|(\Omega). \end{aligned}$$

**Il sottospazio AC.** Presentiamo ora un sottospazio chiuso di BV: lo spazio delle funzioni assolutamente continue. Lo definiamo equivalentemente come

- lo spazio delle funzioni  $L^1$  la cui derivata distribuzionale sia assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue;
- lo spazio delle funzioni integrali, i.e. l'insieme delle funzioni  $u \in L^1$  per cui esista una funzione  $u' \in L^1$  tale che sia  $u(x) - u(y) = \int_y^x u'(z) dz$  quasi ovunque;
- se siamo su un intervallo limitato, lo spazio delle funzioni  $L^1$  per cui si abbia che  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tale che per ogni famiglia finita di intervalli disgiunti  $(a_i, b_i)$  valga, scelto un opportuno rappresentante,

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \quad \implies \quad \sum_i |u(b_i) - u(a_i)| < \varepsilon.$$

La seconda caratterizzazione segue dalla prima grazie al teorema di Radon-Nicodým; la terza esprime l'equiintegrabilità della derivata: su un illimitato questa proprietà non è sufficiente (ad esempio si consideri la funzione  $\frac{1}{x^2}$  su  $[1, +\infty)$ ). Questo sottospazio coincide con  $W^{1,1}$  ed è qui che vale il teorema

fondamentale del calcolo classico. Una funzione in AC ammette un rappresentante continuo: la identifichiamo con questo.  $\square$

Si riporta infine il seguente teorema di compattezza ([3], pag.14):

**Teorema 1.2.12 (Helly)** *Sia data una successione di funzioni  $u_\nu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tale che sia*

$$\text{TV}(u_\nu) \leq C, \quad \|u_\nu\|_\infty \leq M \quad \forall \nu.$$

*Allora esistono una funzione  $u$  e una sottosuccessione  $u_\mu$  tali che*

$$\begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} u_\mu(x) &= u(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ \text{TV}(u) &\leq C, \quad \|u\|_\infty \leq M. \end{aligned}$$

### 1.2.3 Funzioni BV di più variabili

Sia  $\Omega$  un aperto di  $\mathbb{R}^N$ .

**Definizione 1.2.13** *Sia  $u \in L^1(\Omega)$ . Diciamo che  $u$  è una funzione a variazione limitata in  $\Omega$  se la sua derivata distribuzionale è rappresentabile da una misura di Radon finita in  $\Omega$ , cioè se*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} \phi d D_i u \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega), \quad i = 1, \dots, N$$

*per qualche misura vettoriale  $Du = (D_1 u, \dots, D_N u)$  in  $\Omega$ . Indicheremo con  $\text{BV}(\Omega)$  lo spazio delle funzioni a variazione limitata in  $\Omega$ .*

Si osserva che lo spazio di Sobolev  $W^{1,1}(\Omega)$  è contenuto in  $\text{BV}(\Omega)$ , la sua derivata distribuzionale è assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue e la densità dell' $i$ -esima componente è data dalla derivata debole della funzione rispetto all' $i$ -esima variabile: se  $u \in W^{1,1}(\Omega)$ , allora  $du_x = \nabla u \mathcal{L}^N$ . Una delle importanti caratteristiche di BV è tuttavia che a differenza degli spazi di Sobolev può contenere funzioni discontinue, in particolare contiene funzioni caratteristica di insiemi sufficientemente regolari. Un'altra fondamentale caratteristica è la sua chiusura per convergenza  $L^1_{\text{loc}}$ , conseguenza della semi-continuità della variazione totale, e il fatto che si immerge compattamente il



$L^1_{\text{loc}}$ : gli insiemi limitati di BV sono precompatti per la topologia indotta dalla norma  $L^1_{\text{loc}}$  (Teorema 1.2.21).

Ricordiamo che se la derivata distribuzionale di  $u$  è nulla di  $\Omega$ , allora  $u$  è costante in ogni componenete connessa.

**Definizione 1.2.14** Sia  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ . Definiamo la variazione di  $u$  in  $\Omega$  come

$$\text{TV}(u, \Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi : \phi \in [C_c^1(\Omega)]^N, \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

**Lemma 1.2.15 (Semicontinuit  di TV)** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $u_{\nu}, u \in \text{BV}(\Omega)$ .

Allora

$$u_{\nu} \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\Omega)} u \quad \implies \quad \text{TV}(u; \Omega) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \text{TV}(u_{\nu}; \Omega)$$

DIM. Fissata  $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$  il funzionale  $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \ni u \mapsto \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi \in \mathbb{R}$    continuo, quindi  $\{u \rightarrow \text{TV}(u)\} \equiv \sup_{\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)} \{u \rightarrow \int_{\mathbb{R}} u \operatorname{div} \phi\}$    un'applicazione semicontinua inferiormente  $L^1_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ , lo rimane restringendo il dominio a BV.  $\square$

Consideriamo la variazione della misura associata alla derivata distribuzionale di  $u$ : si dimostra che la sua misura di  $\Omega$    esattamente  $\text{TV}(u, \Omega)$ , i.e.  $\text{TV}(u; \Omega) = |Du|(\Omega)$ . Se  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ,    $u \in \text{BV}(\Omega)$  se e solo se  $\text{TV}(u, \Omega) < \infty$ .

**Definizione 1.2.16** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Diciamo che una funzione  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$    **approssimativamente continua** in  $\bar{x}$  se esiste  $\ell \in \mathbb{R}$  tale che sia

$$\lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{|x-\bar{x}| < r} |u(x) - \ell| \, dx = 0$$

**Definizione 1.2.17** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Diciamo che una funzione  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  ha un **salto approssimato** in  $\bar{x}$  se esistono  $u^-, u^+ \in \mathbb{R}$  e  $\nu \in \mathbb{R}^n$  tali che sia

$$\begin{aligned} \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{\substack{(x-\bar{x}) \cdot \nu > 0 \\ |x-\bar{x}| < r}} |u(x) - u^+| \, dx &= 0 \\ \lim_{r \downarrow 0} \frac{1}{r^n} \int_{\substack{(x-\bar{x}) \cdot \nu < 0 \\ |x-\bar{x}| < r}} |u(x) - u^-| \, dx &= 0 \end{aligned}$$

**Definizione 1.2.18** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Diciamo che  $x \in \Omega$  è un **punto irregolare** per una funzione  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  se non è nè di continuità approssimata, nè di salto approssimato.

Le funzioni a variazione limitata godono di una buona struttura ([6], Teorema 1.7.3):

**Teorema 1.2.19** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e sia  $u \in \text{BV}(\Omega)$ . Allora  $\Omega$  è unione di tre sottoinsiemi a due a due disgiunti  $C, J, I$  con le seguenti proprietà:

- $C$  è l'insieme dei punti di continuità approssimata di  $u$ .
- $J$  è l'insieme dei punti di salto approssimato di  $u$ ; inoltre esistono al più un'infinità numerabile di varietà  $C^1$   $(n-1)$ -dimensionali  $\mathcal{F}_i$  immerse in  $\Omega$  tali che sia  $\mathcal{H}^{n-1}(J \setminus \cup_i \mathcal{F}_i) = 0$ . Scelto  $x \in J \cap \mathcal{F}_i$  inoltre il vettore  $\nu$  relativo al salto approssimato è normale a  $\mathcal{F}_i$ .
- Per  $I$ , l'insieme dei punti irregolari, si ha  $\mathcal{H}^{n-1}(I) = 0$ .

Si riporta la regola della catena in BV ([13], Teorema 3.99).

**Teorema 1.2.20 (Volpert)** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$  e  $u \in \text{BV}(\Omega)$ . Sia  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitziana; se  $|\Omega| = \infty$  sia inoltre  $g(0) = 0$ . Allora abbiamo che  $g(u) \in \text{BV}(\Omega)$  e che

$$Dg(u) = g'(u)\nabla u \, d\mathcal{L}^n + (g(u^+) - g(u^-)) \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}|_J + g'(u) \, d_c u$$

dove  $J$  è l'insieme dei punti di salto approssimato.

Si riporta inoltre il seguente teorema, che si potrebbe enunciare come di compattezza rispetto a una topologia (la topologia debole\*) in BV ([13], Teorema 3.23).

**Teorema 1.2.21** Sia  $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ . Ogni successione  $u_h \subset \text{BV}_{\text{loc}}(\Omega)$  che soddisfi

$$\sup_h \left\{ \int_A |u_h| \, dx + |Du_h|(A) \right\} < \infty \quad \forall A \subset\subset \Omega \text{ aperto}$$

ammette una sottosuccessione  $u_{h(k)}$  convergente in  $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  a una funzione  $u \in \text{BV}_{\text{loc}}(\Omega)$ . Se la successione è limitata in  $\text{BV}(\Omega)$ , allora possiamo dire che  $u \in \text{BV}(\Omega)$ .

## 1.3 Inviluppo concavo e convesso di una funzione

**Definizione 1.3.1** *Data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua definiamo il suo inviluppo convesso  $f_*$  come la più grande funzione convessa inferiore a  $f$ :*

$$f_*(x) := \sup\{g(x) : g \text{ convessa} \leq f\}.$$

*Data una funzione  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua definiamo il suo inviluppo concavo  $f^*$  come la più piccola funzione concava superiore a  $f$ :*

$$f^*(x) := \inf\{g(x) : g \text{ concava} \geq f\}.$$

Si osserva che la definizione di  $f_*$  è ben posta:  $\min f$  è convessa e non superiore a  $f$ , inoltre l'estremo superiore di funzioni convesse è una funzione convessa; per  $f^*$  si osserva che è l'opposto dell'inviluppo convesso di  $-f$ .

**Lemma 1.3.2** *Se  $f$  è una funzione continua, denotiamo con  $f_*$  il suo inviluppo convesso. Abbiamo che  $f_*$*

- *coincide con  $f$  fuori da al più un'infinità numerabile di intervalli aperti disgiunti;*
- *in ognuno di quegli intervalli coincide con la corda su  $f$  tra gli estremi dell'intervallo considerato.*

*Lo stesso vale per il suo inviluppo concavo  $f^*$ .*

DIM. Per la continuità delle due funzioni  $(f - f_*)^{-1}(0, +\infty)$  è aperto, quindi unione al più numerabile di intervalli aperti disgiunti. Per definizione è  $f \geq f_*$ : fuori da quegli intervalli può solo essere  $f = f_*$ , che varrà anche negli estremi. Restringiamoci a uno di quei sottointervalli:  $f_*$  essendo convessa è q.o. derivabile. Per assurdo esista un punto interno  $\xi$  t.c. in un intorno di  $\xi$   $f_*$  non coincide con la sua tangente in  $\xi$ : a meno di restringere l'intorno i grafici di  $f$  e  $f_*$  sono separati; da ciò segue che tracciando una corda su  $f_*$

da  $\xi$  a un punto sufficientemente vicino e sostituendo quel trattino di  $f_*$  con tale corda si può ottenere una nuova funzione convessa sotto  $f$  e sopra  $f_*$ , quindi dalla definizione di inviluppo convesso segue l'assurdo. La tesi su  $f^*$  si ottiene osservando che coincide con l'opposto dell'inviluppo convesso di  $-f$ .  $\square$

## 1.4 Legge di conservazione scalare

Per la presente sezione si farà riferimento ai testi [3], [6], [9].

### 1.4.1 Generalità

Chiamiamo *legge di conservazione scalare con flusso*  $f \in \text{Lip}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  l'equazione differenziale alle derivate parziali del primo ordine

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}. \quad (1.4.1)$$

Per motivare il nome possiamo pensare che  $u(t, \cdot)$  rappresenti una densità lineare, ad esempio di massa, al tempo  $t$ . Se  $u$  è anche solo integrabile l'equazione esprime esattamente la conservazione della massa: misurando una regione  $[a, b] \times [t_1, t_2]$  abbiamo che per quasi ogni  $a, b, t_1, t_2$  vale

$$\int_a^b [u(t_2, x) - u(t_1, x)] dx = \int_{t_1}^{t_2} [f(u(t, a)) - f(u(t, b))] dt,$$

cioè la variazione della massa presente nell'intervallo  $[a, b]$  tra i tempi  $t_1, t_2$  è pari al suo flusso attraverso gli estremi.

Il *problema di Cauchy* consiste nel determinare l'evoluzione della soluzione ad ogni tempo positivo data la sua espressione ad un istante iniziale: è rappresentato dal sistema

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(0, x) = \bar{u}(x) \end{cases}. \quad (1.4.2)$$

Formalizzare cosa si intenda per soluzione di (1.4.1) e di (1.4.2) non è una questione banale. Sarebbe naturale cercare, almeno per dati iniziali regolari,

una funzione  $u \in C^1(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  t.c. in ogni punto risolva l'equazione e, per il problema di Cauchy, che per  $t = 0$  coincida con il dato iniziale. Se supponiamo  $u$  regolare possiamo riscrivere la legge di conservazione nella forma quasilineare  $u_t + f'(u)u_x$  e per tempi piccoli siamo allora in grado di costruire tale soluzione, unica, con il metodo delle caratteristiche. In generale tuttavia tale soluzione non si può estendere ad ogni tempo perchè nascono delle discontinuità — quando le linee caratteristiche si intersecano. A causa delle discontinuità non ha nemmeno senso cercare  $u$  in uno spazio di Sobolev. Soluzioni discontinue hanno tuttavia motivo di essere considerate, pensiamo a un modello del traffico: la discontinuità può corrispondere al passaggio da una zona di traffico scorrevole — quindi a bassa densità di auto — a una zona con una coda. La soluzione deve solo essere cercata in uno spazio più opportuno. Prima di vederlo illustriamo due esempi.

In primo luogo consideriamo il caso più buono ed elementare di legge di conservazione, i.e. il caso in cui sia  $f(y) = \lambda y$  con  $\lambda \in \mathbb{R}$ ; successivamente diamo un classico esempio della situazione sopra accennata per evidenziare la non esistenza di una soluzione globale. Presenteremo quindi una nozione più debole di soluzione, ma vedremo che per questa non si ha l'unicità. Arriveremo dunque alla definizione di soluzione entropica, per cui si hanno teoremi di esistenza e unicità. Nella prossima sezione presenteremo poi un algoritmo, quello del *wave-front tracking*, per costruire da un problema di Cauchy con opportuna regolarità la sua soluzione entropica.

**Esempio: equazione lineare.** Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + \lambda u_x = 0 \\ u(0, x) = \bar{u}(x) \end{cases} \quad \text{con } \bar{u} \in C^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R}.$$

È immediato verificare che

$$u(t, x) := \bar{u}(x - \lambda t) \tag{1.4.3}$$

risolve l'equazione. Osserviamo che ciò è dovuto al fatto che  $u$  è costante lungo le linee caratteristiche e che queste sono tutte parallele, ciascuna con direzione

data nel piano  $(x, t)$  da  $(\lambda, 1)$ . Possiamo quindi pensare che tutti i punti del profilo iniziale si muovano alla stessa velocità  $\lambda$ .

Si noti che se si ha un dato iniziale  $\bar{u}$  meno regolare, allora (1.4.3) risolve l'equazione in senso distribuzionale ed è l'unica soluzione.

**Esempio: perdita di regolarità.** Presentiamo ora un problema di Cauchy per l'equazione di Burgers  $u_t + (u^2/2)_x$ . Essendo interessati a soluzioni regolari, ci è consentito riscriverla in forma quasilineare, usando la regola della catena:

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(0, x) = \bar{u}(x) \end{cases} \quad \text{con } \bar{u} \in C^1(\mathbb{R}).$$

La linea caratteristica che parte dal punto  $(0, x)$  avrà in questo caso direzione  $(1, \bar{u}(x))$ : se il dato iniziale è decrescente avremo quindi delle linee caratteristiche che si intersecano in tempi positivi. Da questo segue che non esiste alcuna soluzione regolare definita per ogni tempo: per l'equazione,  $u$  deve essere costante lungo le rette  $(t, \bar{u}(x)t)$ ; si ha quindi che dove queste si sovrappongono  $u$  dovrebbe assumere più valori. Per tempi piccoli una soluzione è data implicitamente da  $u(t, x + t\bar{u}(x)) = \bar{u}(x)$ .

Un altro punto di vista è osservare come varia nel tempo il profilo  $(x, u(t, x))$  della soluzione. Supponiamo l'equazione  $u(t, x) = c$  definisca implicitamente vicino a  $(0, x)$  una curva  $x(t)$ , cioè che sia  $u_x(0, x) \neq 0$ . Per l'equazione è  $\dot{x}(t) = -\frac{u_t}{u_x} = u = c$ . Questo equivale a pensare che i punti  $x$  a livello  $u = c$  si muovano nel tempo con velocità  $c$ : i punti più in alto sono più veloci. A meno che il dato iniziale sia decrescente, i punti con minore ascissa ma con maggiore quota, muovendosi più velocemente, raggiungono quelli che li seguono a quote inferiori e si originano delle discontinuità.

**Soluzioni deboli.** Si è mostrata sopra la necessità, cercando una soluzione definita per ogni tempo positivo, di considerare nozioni più deboli di soluzione. Richiediamo allora che la legge di conservazione, unita alla condizione iniziale, sia soddisfatta in senso distribuzionale:  $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  si dice *soluzione*

debole della legge di conservazione scalare (1.4.1) se  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} [u\phi_t + f(u)\phi_x] = 0. \quad (1.4.4)$$

Diremo  $u$  soluzione debole del *problema di Cauchy* (1.4.2) se  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$  si ha

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} [u\phi_t + f(u)\phi_x] + \int_{\mathbb{R}} \bar{u}\phi(0, \cdot) = 0. \quad (1.4.5)$$

Notiamo che nel caso si abbia  $u \in BV_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  la legge di conservazione si traduce nell'uguaglianza delle due misure  $u_t = -f(u)_x$ .

**Osservazione 1.4.1** *Una soluzione classica è anche una soluzione debole, per vederlo è sufficiente integrare per parti: in (1.4.4) i termini di bordo sono nulli a causa del supporto compatto di  $\phi$ , in (1.4.5) uno di essi elide il secondo addendo.*

*Abbiamo inoltre che se in una regione la soluzione è lipschitziana, allora in quella regione l'equazione è soddisfatta quasi ovunque, quindi dove c'è maggiore regolarità essa è una soluzione nel senso classico. Per vederlo è sufficiente anche questa volta integrare per parti per ottenere da (1.4.4) che*

$$\iint [u_t + f(u)_x]\phi = 0 \quad \forall \phi \text{ a supporto compatto nella regione di regolarità,}$$

*quindi  $u_t + f(u)_x = 0$  q.o. in quella regione.*

**Osservazione 1.4.2** *Si può mostrare che se  $u$  è soluzione debole di un problema di Cauchy, cioè se soddisfa (1.4.5), allora  $u(h, \cdot) \rightharpoonup \bar{u}$  in  $w^* - L^\infty$ .*

**Proposizione 1.4.3 (La condizione di Rankine-Hugoniot)** *Sia data una soluzione debole  $u(t, x) \in L^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$ . Allora in ogni punto di salto approssimato vale l'equazione*

$$\lambda(u^+ - u^-) = f(u^+) - f(u^-), \quad (1.4.6)$$

*dove  $u^\pm$  sono i limiti approssimati sinistro e destro e la direzione del vettore normale al salto nel piano  $(x, t)$  è  $(1, -\lambda)$ .*

DIM. Supponiamo a meno di una traslazione che il salto sia nell'origine. Per avere la tesi vediamo che se  $u$ , limitata, è soluzione debole, allora anche la 'funzione salto'

$$U(t, x) := \begin{cases} u^+ & \text{se } x \geq \lambda t \\ u^- & \text{se } x < \lambda t \end{cases}$$

lo è. Notiamo prima che  $\forall \nu > 0$  sono ancora soluzioni deboli, uniformemente limitate, le funzioni  $u_\nu(t, x) := u(\nu t, \nu x)$ ; queste, per  $\nu \rightarrow \infty$ , tendono ad  $U$  in  $L^1_{\text{loc}}$ . Presa una funzione  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  vale allora

$$\iint U(\phi_t + \phi_x) = \iint (U - u_\nu)(\phi_t + \phi_x) \rightarrow 0 \quad \text{per } \nu \rightarrow \infty.$$

Basta osservare quindi che perché  $U$  sia soluzione debole, come abbiamo appena visto essere, la condizione (1.4.6) deve valere.  $\square$

**Osservazione 1.4.4** *Dalla condizione di Rankine-Hugoniot, se si ha una soluzione limitata, segue che le linee di discontinuità non hanno mai tangente orizzontale, ma rimangono dentro un cono: grazie al Teorema di Lagrange essa implica infatti che  $|\lambda| \leq \max_{[\inf u, \sup u]} f'$ .*

**Esempio: mancanza di unicità** Si consideri nuovamente un problema di Cauchy per l'equazione di Burgers, precisamente

$$\begin{cases} u_t + uu_x = 0 \\ u(0, x) = \chi_{\{x \geq 0\}} \end{cases}.$$

Per ogni  $\alpha \in [0, 1]$  abbiamo che la funzione costante a tratti definita da

$$u_\alpha(t, x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < \alpha t/2 \\ \alpha & \text{per } \alpha t/2 < x < (1 + \alpha)t/2 \\ 1 & \text{per } x > (1 + \alpha)t/2 \end{cases}$$

soddisfa la condizione di Rankine-Hugoniot in ogni punto di discontinuità: ciascuna di quelle funzioni è dunque una soluzione debole al nostro problema di Cauchy. Si osserva allora che in generale la soluzione debole a un problema di Cauchy non è unica.



**Soluzioni deboli entropiche** La definizione di soluzione debole non è soddisfacente: abbiamo adesso visto che viene meno l'unicità di soluzione al problema di Cauchy. Per risolvere questo inconveniente si può selezionare tra tutte le soluzioni deboli 'quella giusta', cioè quella che ha fisicamente senso nel problema modellizzato, imponendo opportune condizioni aggiuntive. Nel caso scalare ci sono diverse condizioni che risultano equivalenti, ne spicca tuttavia una per la sua interpretazione fisica e per il fatto che si può generalizzare a sistemi: la condizione di entropia. Per presentarla definiamo quindi che cos'è una coppia entropia-flusso di entropia:

- definiamo *entropia* una funzione convessa  $\eta$ ;
- definiamo *flusso di entropia* relativo a  $\eta$  una funzione  $q$  t.c. sia  $q' = f'\eta'$ .

Nel caso scalare ci sono infinite entropie: comunque scelta  $\eta$  convessa possiamo definire un relativo flusso  $q(u) := \eta'(u)f(u) - \int^u \eta''(z)f(z)dz$  o anche  $q(u) = \eta(u)f'(u) - \int^u \eta(z)f''(z)dz$ .

**Definizione 1.4.5** Diciamo  $u \in L^1_{\text{loc}}$  soluzione entropica della legge di conservazione scalare (1.4.1) se per ogni coppia di entropia-flusso di entropia  $\eta - q$  si ha che la distribuzione  $\eta(u)_t + q(u)_x$  è nonpositiva, i.e. se  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  con  $\phi \geq 0$  vale

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] \leq 0.$$

Diciamo  $u \in L^1_{\text{loc}}$  soluzione entropica del problema di Cauchy (1.4.2) se per ogni coppia di entropia-flusso di entropia  $\eta - q$  si ha che  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$  con  $\phi \geq 0$  vale

$$\iint_{\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}} [\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x] + \int_{\mathbb{R}} \eta(\bar{u})\phi(0, \cdot) \leq 0.$$

Testando la coppia  $\eta(u) = u$ ,  $q(u) = f(u)$  si osserva che una soluzione entropica è in particolare una soluzione debole.

Se una soluzione entropica ha un salto approssimato  $u^-, u^+$  con relativa direzione normale data nel piano  $(x, t)$  da  $(1, -\lambda)$ , allora vale la disuguaglianza

$$\lambda[\eta(u^+) - \eta(u^-)] \geq q(u^+) - q(u^-). \quad (1.4.7)$$

La dimostrazione è analoga a quella della condizione di Rankine-Hugoniot.

Considerando le entropie  $\eta_{\bar{y}}(y) := [y - \bar{y}]^+$ ,  $q_{\bar{y}}(y) := \text{sgn}([y - \bar{y}]^+)(f(y) - f(\bar{y}))$  per un generico  $\bar{y}$  tra  $u^-$  e  $u^+$  si ottiene la condizione

$$f(u^+) - f(\bar{y}) \leq \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}(u^+ - \bar{y}). \quad (1.4.8)$$

Questo significa che in corrispondenza di ogni salto approssimato di  $u$  abbiamo che  $f$  è sopra la corda da  $u^-$  a  $u^+$ , se  $u^- < u^+$ , sotto in caso contrario. Diremo che una soluzione debole  $u$  soddisfa la **condizione della corda** se (1.4.8) vale in corrispondenza di ogni salto approssimato.

**Osservazione 1.4.6** *Come osservato in [6], pag. 78, se si ha una soluzione  $BV_{\text{loc}}$  la condizione di ammissibilità relativamente a un'entropia  $\eta$  di riduce nel verificare la condizione (1.4.7) in ogni punto di salto approssimato. La condizione di entropia è quindi locale.*

La condizione di entropia viene richiesta per ogni coppia entropia-flusso di entropia. È tuttavia sufficiente testarla solo su alcune famiglie, ad esempio

$$\eta_k(u) = |u - k|, \quad q_k(u) = \text{sgn}(u - k)(f(u) - f(k)) \quad k \in \mathbb{R},$$

grazie alle espressioni

$$\eta(u) = \int \eta''(k)\eta_k \, dk + \text{cost.}, \quad q(u) = \int q''(k)q_k \, dk + \text{cost.}.$$

**Esempio 1.4.7 (Problema di Riemann)** *Definiamo problema di Riemann il particolare problema di Cauchy in cui il dato iniziale è costante a meno di un salto nell'origine. Il dato iniziale sia  $\bar{u}(x) = u^l \chi_{(-\infty, 0)}(x) + u^r \chi_{[0, +\infty)}(x)$ .*

*Studiare il problema di Riemann è importante da un lato perché lo si può facilmente risolvere, dall'altro lato perché servirà poi per costruire soluzioni a problemi più generali. Si osserva inoltre che è invariante per il riscalamento iperbolico*

$$(x, t) \mapsto \left( \frac{x}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon} \right),$$

*quindi ci si aspetta che anche le soluzioni debbano esserlo. Mostriamo ora come si risolve prima nel caso in cui si abbia un flusso strettamente convesso, poi costante a tratti, quindi semplicemente lipschitziano.*

**Flusso uniformemente convesso.** Sia  $f \in C^2$  strettamente convessa. Abbiamo allora che  $f'$  è invertibile, sia  $g$  la sua funzione inversa. Abbiamo allora che l'unica soluzione del problema di Riemann è data da

- se  $u^l > u^r$ , posto  $\lambda := \frac{f(u^r) - f(u^l)}{(u^r - u^l)}$ ,

$$u(t, x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < \lambda t \\ u^r & \text{se } x \geq \lambda t \end{cases}.$$

- se  $u^l < u^r$ ,

$$u(t, x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < f'(u^l)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } f'(u^l)t \leq x < f'(u^r)t \\ u^r & \text{se } x \geq f'(u^r)t \end{cases}.$$

Per la dimostrazione si fa riferimento a [9], Teorema 4, Cap. 3.4.

**Flusso lineare a tratti.** Supponiamo di avere

1.  $f(y) = -|y|$  e  $\bar{u}(x) = \text{sgn}(x)$ . Proviamo a lasciar evolvere invariato il dato iniziale: dove  $x \neq 0$  è  $u_t = -u_x = 0$ ; la corda che congiunge  $(u^-, f(u^-)) \equiv (-1, -1)$  a  $(u^+, f(u^+)) \equiv (1, -1)$  è orizzontale, quindi in effetti la condizione di Rankine-Hugoniot ci permette di provare con uno shock che lasci i valori  $-1$  dove  $x < 0$  e  $1$  dove  $x > 0$ . La definizione di soluzione entropica è soddisfatta.
2.  $f(y) = |y|$  e  $\bar{u}(x) = \text{sgn}(x)$ . Essendo ancora  $f(u^-) - f(u^+) = -1 - (-1) = 0$  potremmo riprovare come sopra. Problema: la soluzione ora non è entropica, dovendo ripetere il conto precedente con  $f$  sopra la corda! Non potendo saltare direttamente da  $-1$  a  $1$  proviamo a passare dal valore  $0$ : il coefficiente angolare  $\lambda_1 = -1$  di  $f$  tra  $-1$  e  $0$  è minore per convessità di quello tra  $0$  e  $1$ ,  $\lambda_2 = 1$ ; si può quindi definire

$$u(t, x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < -t \\ 0 & \text{se } -t \leq x < t \\ 1 & \text{se } x \geq t \end{cases}.$$

senza che le regioni di diversa definizione si sovrappongano, come invece sarebbe avvenuto facendo lo stesso tentativo sopra. Questa soluzione è entropica.

3. Sia ora  $f$  costante a tratti e  $u^l < u^r$  (Fig. 1.1). Abbiamo osservato da un lato che un salto  $u^l < u^r$  soddisfa la condizione di Rankine-Hugoniot se viaggia nel piano  $(t, x)$  nella direzione della corda da  $(u^l, f(u^l))$  a  $(u^r, f(u^r))$ , dall'altro che è entropicamente ammissibile se  $f$  sta sopra la detta corda; se inoltre introduciamo salti intermedi i coefficienti angolari delle corrispondenti corde devono aumentare perché le varie regioni di definizione non si sovrappongano ed il ventaglio che si forma è entropicamente ammissibile a patto che lo siano i singoli salti, come visto nell'Osservazione 1.4.6. Introduciamo quindi  $f_*$ , la più grande funzione convessa che interpola  $f$ ; avremo allora:

$$u^l =: w_0 \quad w_q := u^r$$

$$f'_*(y) = \lambda_j \text{ se } w_j < y < w_{j+1} \quad \Rightarrow \quad u(t, x) = \begin{cases} w_0 & x < \lambda_0 t \\ w_{j+1} & \lambda_j t \leq x < \lambda_{j+1} t \\ w_q & x \geq \lambda_{q-1} t \end{cases}$$

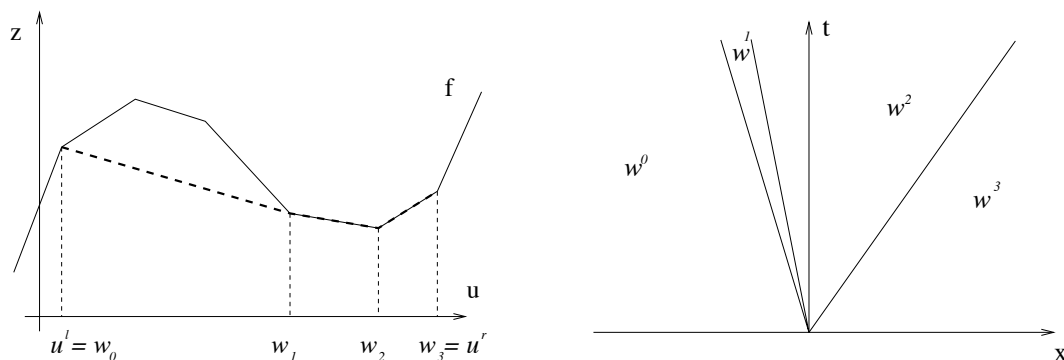


Figura 1.1: A sinistra viene illustrato un flusso costante a tratti, a destra si illustrano le regioni di definizione di una soluzione con dato  $u^l < u^r$ .

4. Sia  $f$  costante a tratti e  $u^l > u^r$ . Se  $u$  soddisfa questo problema di Riemann, allora  $v := -u$  risolve il problema di Riemann con flusso

$g(y) := -f(-y)$ , ancora costante a tratti, e dato iniziale  $-u^l < -u^r$ , problema che abbiamo appena risolto. Saltando il passaggio intermedio basta costruire  $f^*(y)$ , questa volta la più piccola funzione concava che interpola  $f$ , e da qui, notando che i coefficienti angolari  $\lambda_j$  da destra a sinistra aumentano, per concavità,

$$\begin{aligned} u^l &:= w_0 & w_q &:= u^r \\ f^{*l}(y) &= \lambda_j \text{ se } w_{j+1} \leq y \leq w_j \end{aligned} \Rightarrow u(t, x) = \begin{cases} w_0 & x < \lambda_0 t \\ w_{j+1} & \lambda_j t \leq x < \lambda_{j+1} t \\ w_q & x \geq \lambda_{q-1} t \end{cases}$$

**Flusso lipschitziano.** ([6], Sezione 9.5) Quando  $u^l < u^r$  (risp.  $u^r < u^l$ ), consideriamo l'involuppo convesso (risp. concavo)  $f_*$  (risp.  $f^*$ ) di  $f$ . Come nel caso di flusso convesso, ora  $f'_*$  (risp.  $(f^*)'$ ) è monotona, sia  $g$  la sua 'inversa'. Abbiamo allora che la soluzione del problema di Riemann è data rispettivamente da

$$u(t, x) = \begin{cases} u^l & \text{se } x < f'_*(u^l)t \\ g\left(\frac{x}{t}\right) & \text{se } f'_*(u^l)t \leq x < f'_*(u^r)t \\ u^r & \text{se } x \geq f'_*(u^r)t \end{cases}$$

o da una formula analoga con  $f^*$  per  $u^r < u^l$ .

### 1.4.2 Soluzione con il metodo del *wave-front tracking*

Prima di spiegare il metodo del *wave-front tracking* presentiamo una classe di problemi di Cauchy particolarmente semplici da risolvere: la loro soluzione è costante a tratti e si trova risolvendo solamente con degli shock ammissibili un numero finito di problemi di Riemann.

La soluzione al problema più generale, che successivamente si costruirà presentando il metodo del *wave-front tracking*, sarà ottenuta approssimando sempre più finemente il problema di Cauchy d'interesse con problemi di Cauchy in questa classe, quindi passando al limite. Le soluzioni dei primi si possono vedere come soluzioni deboli non entropiche del secondo; guardando solo il secondo, si può pensare di aver approssimato le parti continue della soluzione con una funzione con dei salti sempre più piccoli che vi converge.

**Esempio.** Si vuole risolvere un problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare in cui

- il dato iniziale  $\bar{u}$  è a valori in  $\{y_0, \dots, y_{n+1}\}$  ed ha discontinuità nei punti  $x_1 < \dots < x_s$ ,
- il flusso  $f$  è lineare negli intervalli contigui  $(y_{i-1}, y_i)$ .

Iniziamo ragionando localmente: ciascun salto  $x_i^-, x_i^+$  di  $\bar{u}$  definisce un problema di Riemann. Esso, come visto nell'Esempio 1.4.7, viene risolto da un 'ventaglio' in cui i valori estremi sono fissi. Grazie al fatto che  $\bar{u}$  è costante a tratti con un numero finito di discontinuità possiamo allora risolvere i vari problemi di Riemann che ciascun salto  $x_i^-, x_i^+$  definisce e incollare le soluzioni: per tempi piccoli le diverse regioni di definizione non si sovrappongono, precisamente fino al primo istante in cui delle linee di shock non si intersecano; indicheremo come 'interazioni' queste occorrenze. Grazie alla particolare forma di  $f$  i problemi di Riemann sono risolti semplicemente con degli shock e inoltre nel primo istante di interazione ci troviamo di fronte a una situazione analoga a quella iniziale: possiamo allora ripetere il ragionamento e avanzare di un altro intervallo di tempo. La soluzione debole che si va così formando sarà entropica, essendo sufficiente testare l'ammissibilità sulle discontinuità (Osservazione 1.4.6).

Occorre mostrare ora che proseguendo è possibile estendere la soluzione ad ogni tempo positivo: per farlo mostriamo che il numero di interazioni che possono avere luogo è finito, quindi che dopo un numero finito di passi si ha la soluzione cercata. Guardiamo le singole 'interazioni', distinguendo due casi. Siano ordinatamente  $u_0, \dots, u_k$  i valori di  $u$  separati dalle linee di discontinuità che collidono. Si presentano le seguenti situazioni:

- Salti monotoni:  $u_0, \dots, u_k$  è crescente o decrescente, supponiamo ad esempio crescente. Per l'ammissibilità dei salti, costruiti risolvendo un problema di Riemann,  $f$  è sopra le sue corde nei punti  $u_0 < \dots < u_k$  (Equazione 1.4.8). Perchè l'intersezione abbia luogo i coefficienti angolari delle rette di discontinuità devono da sinistra a destra crescere. Per

la condizione di Rankine-Hugoniot essi sono pari all'inverso dei coefficienti angolari delle corrispondenti corde su  $f$ : devono dunque decrescere i coefficienti angolari delle dette corde. Queste, disegnando di conseguenza una funzione concava, risulteranno sopra la corda per  $u_0, u_k$ . Se ne conclude che dopo l'interazione risolvendo il problema di Riemann abbiamo un solo salto entropico da  $u_0$  a  $u_k$ .

- Salti con cancellazione:  $u_0, \dots, u_k$  non è monotona in  $i$ . In questo caso abbiamo meno informazioni su com'è fatta  $f$  tra  $u_0$  e  $u_k$ . Possiamo genericamente dire che risolvendo il problema di Riemann dopo l'interazione avremo dei salti monotoni, al più pari al numero di discontinuità di  $f'$  meno 1, quindi  $\leq n$ .

Sia  $j(t)$  il numero di discontinuità di  $u$  al tempo  $t$ : esso è il più grande intero  $j$  t.c. esistono  $j + 2$  punti  $\tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_{j+1}$  per cui si ha  $[u(t, \tilde{x}_{i+1}) - u(t, \tilde{x}_i)][u(t, \tilde{x}_i) - u(t, \tilde{x}_{i-1})] \neq 0$ . Definiamo analogamente  $\ell(t)$ , il numero di oscillazioni di  $u$  al tempo  $t$ , come il più grande intero t.c. esistono  $\ell + 2$  punti  $\tilde{x}_0 < \dots < \tilde{x}_{\ell+1}$  di continuità di  $u$  per cui si ha  $[u(t, \tilde{x}_{i+1}) - u(t, \tilde{x}_i)][u(t, \tilde{x}_i) - u(t, \tilde{x}_{i-1})] < 0$ <sup>(1)</sup>.

Isoliamo alcune informazioni nei due casi che si presentano:

- Interazione monotona: il numero di discontinuità di  $u$  diminuisce almeno di 1. La variazione totale e il numero di oscillazioni rimangono le stesse.
- Interazione con cancellazione: viene cancellata un'oscillazione, la variazione totale diminuisce di conseguenza. Il numero di discontinuità può aumentare, ma al più di  $n - 1$ .

Da quanto sopra osservato abbiamo che il numero nonnegativo  $j(t) + n\ell(t)$  ad ogni interazione decresce e che rimane invece costante quando non avvengono interazioni. Esso è finito: da  $j(0^+) \leq nj(0) = ns$  e  $\ell(0^+) = \ell(0) \leq j(0) = s$  abbiamo che è inizialmente limitato da  $2ns$ . Da ciò segue che il numero di interazioni è a sua volta finito, come cercato.  $\square$

---

<sup>1</sup>Metti meglio: il primo è il numero di 'atomi' della derivata, il secondo conta quante volte questa 'cambia segno'

**Osservazione 1.4.8** *Si nota che, potendo solo decrescere quando si hanno interazioni con cancellazione, la variazione totale di  $u$  rimane limitata da  $\text{TV}(\bar{u})$ . Si nota anche che i valori limite a  $\pm\infty$  rimangono quelli iniziali. Dalla struttura particolarmente semplice della soluzione usando la velocità di propagazione finita è allora facile vedere che  $\forall t, h \geq 0$*

$$\|u(t+h) - u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f'\|_{\infty} \text{TV}(\bar{u})h,$$

*i.e. che  $t \mapsto u(t)$  è lipschitziana con la distanza  $d(u, v) := \|u - v\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .*

**Metodo del *wave-front tracking*.** Si vuole risolvere il problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(0, x) = \bar{u}(x) \end{cases}, \quad \text{con} \quad \begin{cases} \bar{u} \in \text{BV}_1(\mathbb{R}), L := \|f\|_{\infty} \\ f \in \text{Lip}_L([-1, 1]). \end{cases} \quad (1.4.9)$$

Per semplicità supponiamo  $\bar{u}(\pm\infty) \in 2^{-\nu}\mathbb{Z}$ , per un  $\nu \in \mathbb{N}$ , e inoltre  $\text{TV}(\bar{u}) = 1$ .

**Osservazione 1.4.9** *Non è limitante aver supposto  $T := \text{TV}(\bar{u}) = 1$ : se così non è basta sostituire  $f(y)$  con  $\tilde{f}(y) := \frac{f(Ty)}{T}$ ; il caso  $T = 0$  è banale. Per quanto riguarda l'assunzione  $u(\pm\infty) \in 2^{-\nu}\mathbb{Z}$ , se così non fosse basterebbe riscalarare il reticolo d'approssimazione di  $\bar{u}, f$ .*

Il metodo del *wave-front tracking* nel caso di una legge di conservazione scalare consiste dei seguenti passi:

- Si approssima il flusso  $f$  con la successione  $f_{\nu}$  costituita dalle sue interpolanti lineari a tratti nei nodi  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$ ; è ancora  $f_{\nu} \in \text{Lip}_L([-1, 1])$ .
- Si approssima il dato iniziale  $\bar{u}$  con una successione di funzioni semplici



a valori in  $2^\nu \mathbb{Z}$  che converga ad  $\bar{u}$  in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ ; ad esempio con

$$\bar{u}_\nu(x) := \sum_{i=0}^{2^\nu-1} \lambda_i \chi_{[x_i, x_{i+1})}$$

$$x_0 := -\infty, \quad x_i := \min \{x : \text{TV}_{(-\infty, x]}(\bar{u}) \geq i2^{-\nu}\}, \quad x_{2^\nu} := +\infty$$

$$\lambda_i = \begin{cases} 2^{-k} & \text{se } \bar{u}(x_i) \in (2^{-k}, 2^{-k+1}] \\ 0 & \text{se } \bar{u}(x_i) = 0 \\ -2^{-k} & \text{se } \bar{u}(x_i) \in [-2^{-k+1}, -2^{-k}) \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}.$$

- Si costruisce, come nell'esempio sopra, la successione  $u_\nu$  di soluzioni deboli entropiche dei problemi di Cauchy

$$\begin{cases} u_t + f_\nu(u)_x = 0 \\ u(0, x) = \bar{u}_\nu(x) \end{cases}.$$

Osserviamo che  $u_\nu$  risulta anche essere una soluzione debole di (1.4.9), in generale non entropica. Possiamo pensare di star approssimando le parti continue con ventagli di salti non ammissibili che diventano sempre più fini.

- La soluzione entropica al tempo  $t$  è il limite in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ , per  $\nu \rightarrow \infty$ , di  $u_\nu(t) := u_\nu(t, \cdot)$ : ora lo mostriamo.

Usiamo l'Osservazione 1.4.8. È  $\text{TV}(u_\nu(t)) \leq \text{TV}(u_\nu(0))$ . Nel nostro caso dunque  $\text{TV}(u_\nu(t))$  rimane sempre limitata da 1. I valori a  $\pm\infty$  di  $u_\nu$  inoltre coincidono sempre con i valori limite di  $\bar{u}$ : per ogni tempo razionale  $t$  possiamo in particolare applicare il teorema di Helly alla successione  $u_\nu(t)$ ; usando il procedimento diagonale di Cantor è possibile quindi estrarre una sottosuccessione  $u_{\mu}(t)$  convergente in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  ad una funzione  $u(t)$  con  $\text{TV}(u(t)) \leq 1$  per  $t \in \mathbb{Q}$ . Essendo lipschitziana la mappa  $t \mapsto u_\nu(t)$ , la definizione di  $u$  si può estendere in modo univoco a tutti i tempi positivi: si prenda il limite in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  di  $u(t_k)$  per una qualsiasi successione di razionali  $t_k \rightarrow t$  su intervalli sempre più grandi; per la lipschitzianità appunto è ininfluenza la scelta della particolare  $t_k$ . Per la semicontinuità inferiore della variazione totale rispetto a limiti in  $L^1_{\text{loc}}$  vale ancora  $\text{TV}(u(t)) \leq 1$ .

Sempre per lipschitzianità abbiamo inoltre che  $u(t_k) \rightarrow \bar{u}$  in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  per  $t_k \rightarrow 0$ . Rimane solo da mostrare che  $u$  è soluzione entropica della legge di conservazione. Dal fatto che  $u_\mu$  è soluzione ammissibile del problema approssimato abbiamo che  $\forall \phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  per ogni entropia  $\eta$  con relativo flusso continuo  $q$  vale

$$\iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+} [\eta(u_\mu)\phi_t + q_\mu(u_\mu)\phi_x] \, dx \, dt \leq 0.$$

Usando la convergenza uniforme di  $f_\mu$  ad  $f$ , quindi di  $q_\mu$  a  $q$ , si ha la tesi.

Per l'unicità di soluzione entropica (Kruzhkov, [19]) possiamo poi dire che tutta la successione  $u_\nu$  converge ad  $u$  in  $L^1_{\text{loc}}$ .  $\square$

**Osservazione 1.4.10** *Evidenziamo che  $\text{TV}(u(t)) \leq \text{TV}(\bar{u})$  per tutti i tempi positivi. Per costruzione inoltre vale ancora*

$$\|u(t+h) - u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq L\text{TV}(\bar{u})h,$$

*i.e.  $t \mapsto u(t)$  è lipschitziana nella distanza  $d(u, v) := \|u - v\|_{L^1(\mathbb{R})}$ .*

**Osservazione 1.4.11** *Usando l'equazione si ottiene che  $u \in \text{BV}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  (Lemma 3.1.1).*

## 1.5 Equazione di Hamilton-Jacobi

Studieremo in questa sezione il problema di Cauchy per la particolare equazione di Hamilton-Jacobi:

$$\begin{cases} v_t(t, x) + H(v_x(t, x)) = 0 \\ v(0, x) = v_0(x) \end{cases} . \quad (1.5.1)$$

Possiamo supporre l'hamiltoniana  $H \in C^2(\mathbb{R})$ . Come nel caso della legge di conservazione, si ha un'equazione non lineare alle derivate parziali del primo ordine e si può vedere con il metodo delle caratteristiche che in generale le soluzioni regolari non sono globali, nemmeno per dati iniziali  $C_c^\infty$ .

Si possono considerare come soluzioni generalizzate funzioni  $v \in W_{loc}^{1,\infty}$  che soddisfino l'equazione quasi ovunque. Si hanno per queste soluzioni deboli risultati di esistenza, ma non è garantita l'unicità; ad esempio si può considerare il problema

$$\begin{cases} v_t(t, x) + v_x^2(t, x) = 0 \\ v(0, x) \equiv 0 \end{cases},$$

sono soluzioni deboli sia  $u \equiv 0$  — soluzione che chiunque sceglierebbe — sia  $u(t, x) = (|x| - t)\chi_{\{t \geq |x|\}}$  — funzione che fuori dalle rette  $t = \pm x$  soddisfa puntualmente l'equazione.

L'unicità si ottiene considerando un altro tipo di soluzioni: le soluzioni di viscosità, introdotte da Crandall e Lions in [11]. Queste devono essere continue, ma si ammette che possano non essere derivabili in alcun punto; ciò nonostante si hanno soddisfacenti risultati di esistenza e unicITÀ.

**Definizione 1.5.1**  $v \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  è soluzione **di viscosità** dell'equazione di Hamilton-Jacobi sse  $\forall \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  si ha che  $\forall (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  valgono

- $\phi_t(t, x) + h(\phi_x)(t, x) \geq 0$  se  $v - \phi$  ha un minimo locale in  $(t, x)$ ;
- $\phi_t(t, x) + h(\phi_x)(t, x) \leq 0$  se  $v - \phi$  ha un massimo locale in  $(t, x)$ .

Per avere una soluzione di viscosità al problema di Cauchy si richiede l'uguaglianza  $v(t, x) = v_0(x)$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$ .

**Osservazione 1.5.2** Tali soluzioni vengono dette di viscosità perché si può vedere ([9], Cap. 10, Pag. 540) che la definizione data è verificata se  $v$  è limite, uniforme sui compatti, di una successione  $v^\varepsilon$  i cui termini sono soluzioni regolari di un'equazione di Hamilton-Jacobi più un sempre più piccolo termine di viscosità:

$$v_t^\varepsilon + H(v_x^\varepsilon) = \varepsilon \Delta v^\varepsilon.$$

**Teorema 1.5.3** La soluzione di viscosità a un problema di Cauchy per l'equazione di Hamilton-Jacobi esiste unica per dati iniziali continui.

La dimostrazione si può trovare in [9]. Fa uso del seguente Lemma ([9], Par. 10.2)

**Lemma 1.5.4** *Sia  $v$  una soluzione di viscosità del problema di Cauchy (1.5.1). Sia  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R})$  tale che  $u - \phi$  abbia un massimo (minimo) locale in  $(0, x)$ . Allora*

$$\phi_t(0, x) + H(\phi_x(0, x)) \leq 0 \quad (\geq 0).$$

Per le soluzioni di viscosità vale poi il principio del massimo ([11], Teorema V.2, Pag. 33), che ora enunciamo.

**Teorema 1.5.5 (principio del massimo)** *Date due soluzioni  $u, v$  di viscosità dell'equazione di Hamilton-Jacobi tali che  $u(0, \cdot) \leq v(0, \cdot)$ , allora per ogni tempo positivo  $t$  vale  $u(t, \cdot) \leq v(t, \cdot)$ .*

Dal principio del massimo segue la contrattività in  $C^0(\mathbb{R})$  del flusso di viscosità:

**Lemma 1.5.6** *Il flusso di viscosità  $\bar{v} \rightarrow v(t; \bar{v})$  è debolmente contrattivo in  $C^0$ :  $\forall t > 0$*

$$\|v(t)\|_\infty \leq \|v(0)\|_\infty.$$

DIM. Data una soluzione di viscosità  $U$  all'istante iniziale è

$$M := \sup_{x \in \mathbb{R}} v(0, x) \geq v(0, \cdot) \geq \inf_{x \in \mathbb{R}} v(0, x) =: m.$$

Sia le funzioni costanti  $M, m$ , sia  $v(t, x)$  sono soluzioni di viscosità: per il principio del massimo si ottiene allora la disuguaglianza  $M \geq v(t, \cdot) \geq m$  per tutti i tempi positivi. Da questo  $\|v(t)\|_\infty \leq \max\{|M|, |m|\} = \|v(0)\|_\infty$ . Abbiamo quindi ottenuto che la mappa  $\bar{v} \mapsto v(t; \bar{v})$  per ogni tempo è una contrazione debole, nella norma di  $C^0$ ; in particolare è lipschitziana con costante di Lipschitz indipendente da  $t$ .  $\square$

**Corollario 1.5.7** *La mappa  $\bar{u} \mapsto u(t; \bar{u})$  da  $C^0$  in  $C^0$  è una contrazione debole, per ogni  $t > 0$ .*

DIM.

Si osserva prima che  $\|v(t; \bar{v}_1) - v(t; \bar{v}_2)\|_\infty \leq \|\bar{v}_1 - \bar{v}_2\|_\infty$ ; è infatti

$$v(0; \bar{v}_1) + \inf(\bar{v}_2(x) - \bar{v}_1(x)) \leq v(0; \bar{v}_2) \leq v(0; \bar{v}_1) + \sup(\bar{v}_2(x) - \bar{v}_1(x)),$$

quindi applicando il principio del massimo

$$v(t; \bar{v}_1) + \inf(\bar{v}_2(x) - \bar{v}_1(x)) \leq v(t; \bar{v}_2) \leq v(t; \bar{v}_1) + \sup(\bar{v}_2(x) - \bar{v}_1(x)),$$

vale a dire

$$\inf(\bar{v}_2(x) - \bar{v}_1(x)) \leq v(t; \bar{v}_2) - v(t; \bar{v}_1) \leq \sup(\bar{v}_2(x) - \bar{v}_1(x)).$$

Questo mostra la tesi:  $\|v(t; \bar{v}_2) - v(t; \bar{v}_1)\|_\infty \leq \|\bar{v}_2 - \bar{v}_1\|_\infty$ . □

Si riporta qui un risultato di stabilità per il problema di Cauchy per un'equazione di Hamilton-Jacobi: si considera il caso in cui si approssimi sia il dato iniziale, sia l'hamiltoniana ([18], Teorema 5.2.5).

**Proposizione 1.5.8** *Sia  $u_k \in C^0(\mathbb{R})$  soluzione di viscosità di*

$$u_t + H_k(u_x) = 0,$$

dove  $H_k \in C^0(\mathbb{R})$ . Supponiamo che  $u_k \rightarrow u$  e che  $H_k \rightarrow H$  localmente uniformemente. Allora  $u$  è una soluzione di viscosità di

$$u_t + H(u_x) = 0.$$



## Capitolo 2

# La dissipazione e il funzionale di Glimm

Tra i vari funzionali definiti su  $BV(\mathbb{R})$  a valori in  $\mathbb{R}$ , che siano decrescenti per soluzioni entropiche  $u(t, x)$  di leggi di conservazione scalari, i più importanti sono la variazione totale  $TV(u)$  e il funzionali di Glimm  $Q(u)$ .

La decrescita della variazione totale è una conseguenza del fatto che le soluzioni entropiche generano un semigruppato contrattivo in  $L^1(\mathbb{R})$ . Questo può essere a sua volta visto come la proprietà in qualche modo legata alla contrattività in  $C^0$  delle soluzioni di viscosità per Hamilton-Jacobi. Questa, come mostrato nella Sezione 1.5, può essere pensata come l'equazione soddisfatta da una primitiva  $U$  della soluzione entropica  $u = U_x$ .

La decrescita del funzionale di Glimm  $Q$ , invece, è dovuta alla non linearità della legge di conservazione. A grandi linee, il suo valore è una misura delle interazioni che le onde presenti all'istante  $t$  avranno nell'intervallo  $\{t' : t' > t\}$ : la sua decrescita è quindi una conseguenza del fatto che per una soluzione entropica ogni interazione diminuisce il numero di interazioni future. In termini appena più precisi, questo funzionale corrisponde ad un doppio integrale: se si immagina di isolare due onde viaggianti della soluzione, l'onda presente in  $(t, x)$  e l'onda presente in  $(t, y)$ , allora la loro quantità di interazione è una funzione  $q(t, x, y)$  che nel caso di sistemi di leggi di conservazione corrisponderebbe ad una stima della crescita della variazione totale. Quindi il funzionale viene

scritto come

$$Q(u(t)) = \frac{1}{2} \iint_{x < y} q(t, x, y) dx dy.$$

Sebbene l'uso del funzionale di Glimm sia di fondamentale importanza nello studio dell'esistenza e stabilità delle soluzioni di sistemi di leggi di conservazione, il significato intrinseco del funzionale è sempre rimasto piuttosto oscuro. Una conseguenza di questo fatto è che non è stato possibile estendere il funzionale al caso multidimensionale, dove un ruolo essenziale viene invece giocato dall'entropia, per esempio nelle relazioni entropia/dissipazione di entropia ([20], cap. 9).

Nei sistemi 1-dimensionali, invece, l'entropia rimane in ombra rispetto al funzionale di Glimm. A tutt'oggi non c'è una teoria generale di buona positura per i sistemi di leggi di conservazione basate sull'uso dell'entropia, un funzionale definito sulle soluzioni che in teoria dovrebbe selezionare quelle fisiche da quelle artificiali. Osserviamo che, in generale, l'entropia è infinita per soluzioni di leggi iperboliche: queste equazioni sono infatti invarianti per cambiamenti di scala e quindi nessuna stima integrale sulla soluzione ha senso.

In questo capitolo vogliamo definire un nuovo funzionale,  $\mathcal{E}_{f,T}$ , sulle soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare; faremo in modo che sia semicontinuo rispetto alla convergenza in  $L^1$  e decrescente nel tempo. Questo funzionale ha due proprietà che giudichiamo molto interessanti:

1. da un lato, giocherà il ruolo del funzionale di Glimm, ma a differenza di quello non sarà ottenuto con una formula di doppio integrale;
2. dall'altro lato, è direttamente legato all'entropia, più precisamente alla dissipazione istantanea di entropia.

Quest'ultima proprietà è particolarmente interessante, come abbiamo osservato più sopra.

L'idea guida è che la soluzione 'buona' di un sistema con entropia è quella che tende a massimizzare la dissipazione. C'è naturalmente il vincolo che la funzione deve essere soluzione almeno nel senso debole, per cui possiamo dire che la dissipazione cresce quando può scegliere di crescere, altrimenti cerca di



diminuire il meno possibile. Come si vedrà la dissipazione decresce quando ci sono degli shock che si cancellano, cioè la variazione totale diminuisce.

Vedremo come la dissipazione può essere definita solo a meno di un insieme di misura nulla nei tempi, tuttavia la monotonia di  $\mathcal{E}_{f,T}$  permette di prendere un rappresentante che sia continuo da destra rispetto al tempo  $t$ . Oltre a dimostrare che il funzionale decresce, daremo la forma esplicita di questo rappresentante: in particolare otterremo un funzionale definito su tutte le funzioni  $BV(\mathbb{R})$ .

Vogliamo infine ricordare come la dissipazione di entropia (utilizzata nelle disuguaglianze entropia/dissipazione, basate sulle stime di Sobolev-logaritmiche) entri nelle dimostrazioni di stabilità di molte equazioni della fisica matematica, come le equazioni di Fokker-Planck e di Boltzmann ([20], cap. 9).

Il capitolo è organizzato come segue.

Nella Sezione 2.1 ricordiamo la definizione del funzionale di Glimm e diamo una dimostrazione della sua decrescita per le soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare.

Nella Sezione 2.2 introduciamo la nozione di dissipazione istantanea di entropia,  $\mathcal{D}$ . Ci focalizzeremo sull'entropia  $u^2/2$ : la dissipazione di questa entropia ha infatti una interpretazione geometrica, alla stessa stregua dell'interpretazione geometrica del funzionale di Glimm ([4]); da questa proprietà daremo la sua prima definizione. Dal punto di vista analitico, la dissipazione corrisponde ad una misura nel piano localmente finita; la dissipazione istantanea viene quindi nuovamente definita come la densità della sua marginale rispetto al tempo. Calcoliamo tale densità per varie classi di soluzioni: in particolare, grazie alla formula di Volpert sulla regola della catena per funzioni  $BV_{\text{loc}}$ , mostriamo che per quasi ogni tempo le due formulazioni di dissipazione coincidono. Questa sezione viene conclusa con un'analisi di quello che avviene durante interazioni nonlineari tra onde, sia per il funzionale di Glimm che per la dissipazione istantanea. Il confronto tra questi due funzionali aiuterà a capire il loro uso come funzionali di Liapunov.

Nella Sezione 2.3 definiamo il funzionale di Liapunov basato sulla dissipazione istantanea:  $\mathcal{E}_{f,T}$ . Questo sarà la somma pesata della variazione totale e della dissipazione istantanea. Lo scopo ultimo è dimostrare che decresce lungo

soluzioni entropiche: a questo fine serviranno diverse stime. Più precisamente si stima il valore di  $\mathcal{D}$  su un singolo salto e su una funzione BV e come essi variano in seguito a particolari approssimazioni della funzione. Si costruisce quindi una successione di funzioni costanti a tratti  $u_\nu$  convergenti ad  $u$  e tali che la dissipazione istantanea  $\mathcal{D}(u_\nu)$  converge alla dissipazione di  $u$ . Questi lemmi ci permetteranno di ottenere da un lato che il funzionale di interazione  $\mathcal{E}_{f,T}$ , basato sulla dissipazione, è semicontinuo inferiormente per convergenza  $L^1$ , dall'altro che è possibile scegliere una famiglia di dati iniziali costanti a tratti,  $u_\nu$ , tali che  $\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) \rightarrow \mathcal{E}_{f,T}(u)$ . Mostrando che  $\mathcal{E}_{f,T}$  è decrescente sulle approssimanti costruite col *wave-front tracking*, la convergenza in  $L^1_{\text{loc}}$  alla soluzione conclude la dimostrazione.

## 2.1 Il funzionale di Glimm: $Q$

Data una funzione  $u \in \text{BV}(\mathbb{R})$ , consideriamo le due misure  $du$ ,  $df(u)$ . Il funzionale di Glimm è dato da

$$Q(u) = \frac{1}{4} \iint_{\mathbb{R}^2} |du(x)df(u)(y) - du(y)df(u)(x)|. \quad (2.1.1)$$

Si osservi che la formula ha senso perchè  $du(x)df(u)(y) - du(y)df(u)(x)$  è una misura prodotto sul piano  $\mathbb{R}^2$  e il funzionale  $Q$  è un quarto della sua variazione totale.

Il funzionale viene frequentemente usato su approssimanti costanti a tratti. In questo caso, se la funzione  $u$  assume ordinatamente da  $-\infty$  a  $+\infty$  i valori  $\{u_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ , allora è facile vedere che la formula (2.1.1) si riduce a

$$\begin{aligned} Q(u) &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} \left| \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ f(u_{i+1}) - f(u_i) \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} u_{j+1} - u_j \\ f(u_{j+1}) - f(u_j) \end{pmatrix} \right| \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} |u_{i+1} - u_i| |u_{j+1} - u_j| \left| \frac{f(u_{i+1}) - f(u_i)}{u_{i+1} - u_i} - \frac{f(u_{j+1}) - f(u_j)}{u_{j+1} - u_j} \right|. \end{aligned}$$

Questo equivale a prendere in  $\mathbb{R}^2$  la spezzata di vertici consecutivi  $(u_i, f(u_i))$  e sommare l'area dei triangoli che hanno per lati due segmenti della spezzata.

Come mostrato in [1], questo funzionale è inferiormente semicontinuo per convergenza in  $L^1_{\text{loc}}$ . Questo funzionale inoltre decresce lungo le soluzioni di

una legge di conservazione scalare. Per mostrare questa decrescita è sufficiente mostrarla per delle approssimanti della soluzione entropica costruite con il metodo del *wave-front tracking*, già presentate nella Sezione 1.4.2: scegliendo per l'approssimazione dati iniziali  $\bar{u}^\nu$  per cui si abbia la convergenza di  $Q(\bar{u}^\nu)$  a  $Q(\bar{u})$ , la tesi si avrà allora grazie alla semicontinuit :

$$Q(u(t)) - Q(u(0)) \leq \liminf_{\nu} Q(u^\nu(t)) - \lim_{\nu} Q(u^\nu(0)) \leq 0.$$

Per la propriet  di semigrupp , infatti, qualunque istante si pu  pensare come istante iniziale. Nella Sezione 2.2.3 si mostra poi come  $Q$  decresca per ogni tempo lungo soluzioni costanti a tratti, decrescendo, in senso largo, ad ogni interazione; in particolare viene allora mostrato che decresce lungo le approssimanti del *wave-front tracking*, costanti a tratti.

Si riporta che in [4] viene data una visualizzazione di come varia  $Q$  lungo una soluzione entropica  $u$  di una legge di conservazione scalare, associando a  $u(t) \in BV$  una curva piana e valutando su questa un funzionale.

## 2.2 $\mathcal{D}$ : la dissipazione di entropia istantanea

In questo capitolo definiamo e calcoliamo la dissipazione istantanea di una soluzione entropica  $u$  di una legge di conservazione

$$u_t + f(u)_x = 0. \tag{2.2.1}$$

Per prima cosa diamo una definizione in termini geometrici. Questo funzionale  $\mathcal{D}_f$  viene definito su tutte le funzioni  $BV(\mathbb{R})$  e a priori non sembra legato alla dissipazione.

In seguito calcoliamo l'entropia istantanea a partire dalla definizione di misura di dissipazione, usando la formula di Volpert. Come osservato sopra, questa dissipazione  $\hat{\mathcal{D}}_f$  pu  in genere essere calcolata solo a meno di un insieme di misura nulla nei tempi. Dopo avere calcolato come esempio il funzionale su funzioni  $C^1$  a tratti, si mostra quale sia la formula pi  in generale per funzioni  $BV$  che siano soluzioni di (3.2.1). In particolare si mostra che ogni volta che la dissipazione istantanea  $\hat{\mathcal{D}}_f$  pu  essere calcolata, questa coincide con  $\mathcal{D}_f$ . Nel

capitolo seguente si dimostrerà che  $\mathcal{D}_f(u(t))$  è continuo da destra se  $u(t) \in BV$  risolve (3.2.1): segue che  $\mathcal{D}_f$  è il rappresentante continuo da destra di  $\hat{\mathcal{D}}_f$ .

Si analizza infine il comportamento di  $\mathcal{D}_f$  e di  $Q$  su soluzioni di wave-front tracking, introdotte nella Sezione 1.4.2. La struttura di queste soluzioni è particolarmente semplice e permette di chiarire come i due funzionali cambino a seconda delle interazioni tra onde presenti nella soluzione. In particolare vediamo che nei casi in cui non c'è cancellazione, cioè la variazione totale non decresce, la dissipazione e il funzionale di Glimm sono perfettamente equivalenti:  $Q$  decresce e  $\mathcal{D}_f$  cresce della stessa quantità. Nei casi con cancellazione, invece, il funzionale di Glimm è ancora decrescente, ma la dissipazione può in generale decrescere (invece di crescere). Tuttavia la decrescita della variazione totale è sufficiente perché il funzionale  $\mathcal{E}_{f,T}$ , definito come la somma della variazione totale meno la dissipazione, diminuisca.

Nel seguito non indicheremo la dipendenza dal flusso  $f$  in  $\mathcal{D}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}$ .

### 2.2.1 Definizione geometrica

Incominciamo dando la definizione del funzionale  $\mathcal{D}(u)$ , per ogni  $u \in BV(\mathbb{R})$ . Questa definizione è legata all'interpretazione della dissipazione di uno shock data in [6], cap. 8.5, pag. 221.

**Definizione 2.2.1** *Siano  $K \subset \mathbb{R}$  intervallo compatto,  $f \in C^2(K; \mathbb{R})$ . Dati due punti  $a, b \in K$  definiamo  $\mathcal{A}^f(a, b)$  come (Fig. 2.1)*

- l'area piana delimitata sopra dal grafico di  $f$ , sotto dal grafico dell'involuppo convesso  $f_*$  di  $f$  in  $(a, b)$  se è  $a \leq b$ ;
- l'area piana delimitata sotto dal grafico di  $f$ , sopra dal grafico dell'involuppo concavo  $f^*$  di  $f$  in  $(b, a)$  se è  $b < a$ .

**Definizione 2.2.2** *Siano  $J \subset \mathbb{R}$  aperto,  $f \in C^0(J; \mathbb{R})$ . Data una funzione  $u \in BV(J)$  con salti nei punti  $\{x_k\}$  definiamo  $\mathcal{D}_f(u; J) := \sum_k \mathcal{A}^f(u(x_k^-), u(x_k^+))$ . Diremo che  $\mathcal{D}_f(u; J)$  è la **dissipazione istantanea di entropia** di  $u$  (Fig. 2.2).*

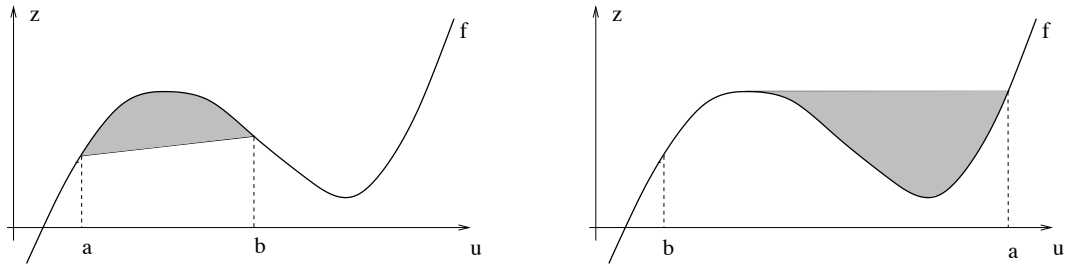


Figura 2.1: Il valore di  $\mathcal{A}(a, b)$  è pari all'area tratteggiata.

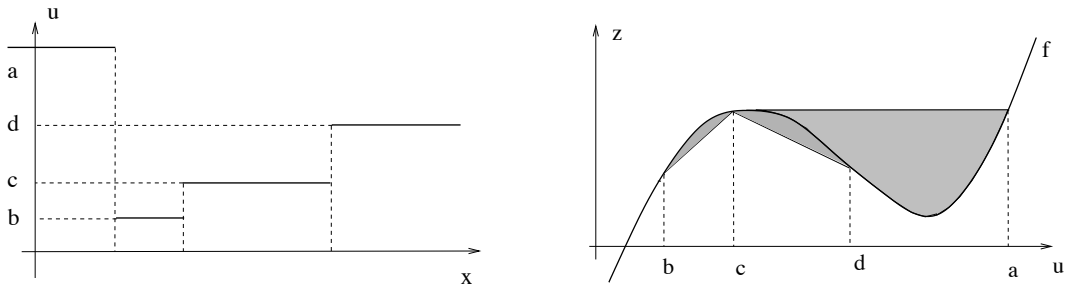


Figura 2.2: Se valutiamo  $\mathcal{D}$  sulla funzione BV illustrata a sinistra, il suo valore è pari all'area tratteggiata nella figura a destra.

Con  $\mathcal{D}(u)$  intenderemo  $\mathcal{D}(u; \mathbb{R})$ . Ometteremo nel seguito la dipendenza di  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{D}$  da  $f$ . Il funzionale  $\mathcal{D}$  è certamente ben definito: per funzioni  $f \in C^2$  è facile vedere che l'area è dell'ordine del salto elevato al cubo, quindi  $\mathcal{D}(u) \leq \mathcal{O}(1)\text{TV}(u)^3$ ; lo si mostrerà nel Lemma 2.3.4.

### 2.2.2 Definizione analitica

Diamo ora un'altra definizione di dissipazione istantanea di entropia, valida per soluzioni  $u(t) \in BV$  di una legge di conservazione scalare. Essa è legata a una analoga definizione in [6], cap. 9.7, pag. 257; in quel contesto viene usata per calcolare la dissipazione di una soluzione autosimile  $u(t, x) = u(x/t)$  di una legge di conservazione. Essa sarà definita per quasi ogni tempo e, calcolando la sua espressione esplicita, vedremo che per questi tempi coincide con quella presentata nella precedente sezione.

Sia data una legge di conservazione scalare  $u_t + f(u)_x = 0$  con  $f \in C^2(\mathbb{R})$  e sia  $u$  una sua soluzione debole entropica. Comunque presa una coppia  $\eta$ - $q$  entropia convessa-flusso di entropia

$$-\mu(u) := (\eta(u))_t + (q(u))_x$$

è, per definizione di soluzione entropica, una distribuzione non positiva. Dall'Osservazione 1.2.6 abbiamo che  $-\mu$  è una misura non positiva localmente finita su  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ . Ricordiamo che il flusso è legato all'entropia tramite l'equazione

$$q'(u) = \eta'(u)f'(u).$$

Possiamo quindi dare la seguente definizione ([6], pag.76):

**Definizione 2.2.3** *Siano fissate una legge di conservazione scalare e una relativa entropia strettamente convessa  $\eta$ . Chiameremo **dissipazione di entropia** di una soluzione entropica  $u$  la misura positiva su  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  data da  $\mu(u) := -[(\eta(u))_t + (q(u))_x]$ . Essa è localmente finita.*

**Osservazione 2.2.4** *Ricordiamo che una soluzione entropica è una soluzione che soddisfa la disuguaglianza di entropia*

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$$

per tutte le coppie entropia-flusso di entropia. Per una legge scalare, in cui in particolare ci sono infinite entropie, la soluzione che soddisfa la disuguaglianza per ogni entropia è unica (Kruzkhov, [19]).

In generale, tuttavia, i sistemi fisici ammettono solo una entropia strettamente convessa; è quindi interessante studiare quali proprietà della soluzione possono essere dedotte utilizzando solo una entropia. Per esempio non è chiaro se la condizione di entropia su una soluzione  $u \in L^\infty$  implica che la dissipazione è concentrata su un insieme di misura nulla, come vedremo valere nel caso di soluzioni BV, grazie alla formula di Volpert.

Per leggi di conservazione scalari abbiamo visto che esistono infinite entropie; noi ne fissiamo ora una particolare, strettamente convessa:

$$\eta(u) = \frac{u^2}{2} \qquad q(u) = uf(u) - \int^u f(v) dv.$$

È possibile ripetere i calcoli che seguono per altre entropie strettamente convesse, dimostrando gli stessi risultati (cambiando nel caso qualche costante). L'entropia  $u^2/2$  è quella per cui il parallelismo con il funzionale di Glimm definito nel Capitolo 2.1 si trasforma in molti casi in una uguaglianza.

Per calcolare la dissipazione istantanea, calcoliamo la dissipazione di entropia di strisce  $[t_1, t_2] \times \mathbb{R}$ . L'idea è di utilizzare alcune proprietà delle soluzioni entropiche delle leggi di conservazione (tra cui la velocità finita di propagazione) e il teorema di Radon-Nychochim per definire la *dissipazione istantanea di entropia*, che risulterà essere equivalente alla precedente definizione geometrica.

**Osservazione 2.2.5** *Vogliamo sottolineare che in questa prima parte della tesi assumiamo che  $u$  sia soluzione entropica e vogliamo attraverso essa calcolare un funzionale che decresca nel tempo. Chiaramente, il fatto che  $u$  sia soluzione entropica e che ci sia un funzionale decrescente non sono a priori legati: come osservato nell'introduzione, finora non è mai stato notato il legame tra il funzionale di Glimm e la dissipazione di entropia.*

Nel seguito calcoleremo la dissipazione di entropia in due casi, il primo introduttivo al secondo. Nel caso  $u$  sia  $C^1$  a tratti, con una integrazione per parti si arriva immediatamente a una formula in cui compare la dissipazione istantanea, che subito dopo ridefiniremo quindi in questo contesto. Nel caso  $u \in BV$ , invece, bisogna usare alcuni fondamentali risultati sulle funzioni BV, in particolare la formula di Volpert, che esprime la regola della catena per funzioni BV.

**Calcolo per  $u \in C^1$  a tratti.** Vogliamo calcolare la misura dissipazione di entropia di una striscia  $(t, t+h) \times \mathbb{R}$  nel caso in cui la soluzione  $u$  sia regolare tranne delle discontinuità su curve  $(t, \gamma_i(t)) \in C^1(t, t+h)$  che non si intersecano: chiamiamo  $\Omega_i, \Omega_{i+1}$  i domini della striscia con parte di bordo  $(t, \gamma_i(t))$  e supponiamo che  $u \upharpoonright_{\Omega_i}$  sia estendibile a una funzione  $C^1(\overline{\Omega_i}; \mathbb{R})$ .

Data una funzione test  $\phi \in C_c^1((t, t+h) \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  è chiaramente

$$\iint_{(t, t+h) \times \mathbb{R}} (\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x) \equiv \sum_i \iint_{\Omega_i} (\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x)$$

Studiamo meglio gli integrali a secondo membro: è importante notare che gli integrandi nelle singole regioni  $\Omega_i$  sono regolari. Iniziamo definendo il campo vettoriale  $v := \begin{pmatrix} \phi\eta(u) \\ \phi q(u) \end{pmatrix}$ . Usando l'equazione differenziale vediamo allora che gli integrandi non sono altro che la divergenza di  $v$ :

$$\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x = \eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x + (\eta(u)_t + q(u)_x)\phi \equiv \operatorname{div} v.$$

Applichiamo il teorema della divergenza nella regione  $\Omega_i$ : poiché  $\phi$  ha supporto compatto nella striscia  $[t, t+h] \times \mathbb{R}$ , il flusso di  $v$  è non nullo solo sulle curve  $\gamma_i(t)$ :

$$\iint_{\Omega_i} \operatorname{div} v = \Phi_{\partial\Omega_i}(v) = \int_t^{t+h} [v(t, \gamma_{i+1}^-(t)) \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_{i+1}^-(t) \\ 1 \end{pmatrix} - v(t, \gamma_i(t)^+) \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_i(t) \\ 1 \end{pmatrix}] dt.$$

Ponendo  $u_i^+(t) := u(t, \gamma_i(t)^+)$ ,  $u_i^-(t) := u(t, \gamma_i(t)^-)$  abbiamo, riordinando le somme,

$$\begin{aligned} \iint_{(t,t+h) \times \mathbb{R}} (\eta(u)\phi_t + q(u)\phi_x) &= \sum_i \iint_{\Omega_i} \operatorname{div} v \\ &= \sum_i \int_t^{t+h} [v(t, \gamma_i^-(t)) - v(t, \gamma_i(t)^+)] \cdot \begin{pmatrix} -\dot{\gamma}_i(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \sum_i \int_t^{t+h} \phi(t, \gamma_i(t)) [(\eta(u_i^+) - \eta(u_i^-))\dot{\gamma}_i - (q(u_i^+) - q(u_i^-))] dt. \end{aligned}$$

Per la condizione di Rankine–Hugoniot vale  $\dot{\gamma}_i = \frac{f(u_i^+) - f(u_i^-)}{u_i^+ - u_i^-}$ , quindi con l'entropia da noi scelta  $\eta(u) = \frac{u^2}{2}$  si ha

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_i [\eta(u_i^+) - \eta(u_i^-)] - [q(u_i^+) - q(u_i^-)] &= \\ &= \dot{\gamma}_i \frac{(u_i^+ - u_i^-)(u_i^+ + u_i^-)}{2} - \left[ u_i^+ f(u_i^+) - \int_{u_i^-}^{u_i^+} f - u_i^- f(u_i^-) + \int_{u_i^-}^{u_i^+} f \right] = \\ &= \frac{1}{2} [f(u_i^+) - f(u_i^-)] (u_i^+ + u_i^-) - \left[ u_i^+ f(u_i^+) - \int_{u_i^-}^{u_i^+} f - u_i^- f(u_i^-) \right] = \\ &= -\frac{1}{2} u_i^+ f(u_i^+) + \frac{1}{2} u_i^- f(u_i^-) - \frac{1}{2} u_i^+ f(u_i^-) + \frac{1}{2} u_i^- f(u_i^+) + \int_{u_i^-}^{u_i^+} f = \\ &= \int_{u_i^-}^{u_i^+} f - \frac{u_i^+ - u_i^-}{2} [f(u_i^+) + f(u_i^-)] =: \hat{A}(u_i^-, u_i^+), \end{aligned} \tag{2.2.2}$$



i.e. l'area — con segno — compresa da  $u_j^-$  a  $u_j^+$  tra  $f$  e la sua corda. Più precisamente, per  $u^- < u^+$ , l'area è positiva nelle regioni dove  $f(u)$  è sopra la corda con estremi  $(u^-, f(u^-))$  e  $(u^+, f(u^+))$ , negativa nell'altro caso. I segni si invertono per  $u^- > u^+$ .

Ricordiamo ora dalla sezione 1.4.1 che una soluzione è entropica se e solo se quella quantità è positiva per ogni entropia e che questo implica la condizione della corda (1.4.8):  $f$  è sopra la corda da  $u^-$  a  $u^+$ , se  $u^- < u^+$ , sotto in caso contrario. Segue quindi  $\hat{\mathcal{A}} \equiv \mathcal{A}$ . Si è dunque ottenuto

$$\mu(u)([t, t+h] \times \mathbb{R}) = \sum_i \int_t^{t+h} \mathcal{A}(u_i^-(t), u_i^+(t)) dt.$$

□

**Calcolo per  $u$  costante a tratti.** Consideriamo un caso ancora più elementare per introdurre il prossimo approccio: supponiamo di avere una soluzione entropica  $u$  costante in un numero finito di regioni delimitate da rette non orizzontali, i.e. del tipo di quelle che si costruiscono nel metodo del *wave-front tracking*. Chiaramente anche  $f(u)$  avrà questa struttura. Le misure date dalle derivate distribuzionali  $u_t, f(u)_x$  sono certamente nulle in regioni che non intersecano le rette di discontinuità, quindi anche  $\mu$ . La misura  $\mu$  di una regione che interseca una porzione di retta, nel piano  $(x, t)$ , con pendenza  $\frac{1}{\lambda}$  che separa i valori  $u^-, u^+$  tra i tempi  $t, t+h$  è invece pari a

$$\{\lambda [\eta(u^+) - \eta(u^-)] - [q(u^+) - q(u^-)]\} h.$$

Usando la relazione (2.2.2), relativamente a una striscia in cui le rette non si intersecano si ritrova quindi l'espressione

$$\mu(u)([t, t+h] \times \mathbb{R}) = h \sum_i \mathcal{A}(u_i^-, u_i^+) \equiv \sum_i \int_t^{t+h} \mathcal{A}(u_i^-(t), u_i^+(t)) dt.$$

□

**Calcolo per  $u \in \text{BV}_{\text{loc}}$ .** Vogliamo ora calcolare nuovamente la misura dissipazione di entropia di una striscia  $[t, t+h] \times \mathbb{R}$  sotto l'ipotesi più generale in cui la soluzione entropica  $u$  abbia semplicemente regolarità  $\text{BV}([t, t+h] \times \mathbb{R})$ .

Notiamo che questa assunzione è sufficiente a dire che non solo  $\mu$  è una misura, ma lo sono anche  $u_t$  e  $f(u)_x$ . Ricordiamo la formula di Volpert (Teorema 1.2.20), che rappresenta la regola della catena per funzioni BV: per ogni  $g \in C^1$  è

$$Dg(u) = g'(u)\nabla u d\mathcal{L}^\varepsilon + g'(u)d_c u + (g(u^+) - g(u^-))\nu d\mathcal{H}^1|_J, \quad (2.2.3)$$

dove  $d_c u$  è la parte cantoriana della misura  $du$  e  $J$  è l'insieme dei salti approssimati,  $\nu$  la normale al salto e  $u^-$ ,  $u^+$  i valori lungo il salto.

Per una soluzione  $u \in BV$ , i salti approssimati devono soddisfare la condizione di Rankine-Hugoniot: in particolare, ogni salto approssimato non ha tangente parallela all'asse  $x$  e quindi può essere parametrizzato da  $t$ . Più precisamente, come mostrato in [6], pag. 21, i salti approssimati di una soluzione  $u \in BV$  sono supportati da un insieme numerabile di curve Lipschitziane  $\gamma_i$ , cioè

$$d_j u = \sum_i (u(\gamma_i(t)^+) - u(\gamma_i(t)^-)) \begin{pmatrix} -\gamma_i'(t) \\ 1 \end{pmatrix} dt|_{[t_i^-, t_i^+]}, \quad (2.2.4)$$

dove  $d_j u$  è la parte di salto di  $du$ .

Si ha quindi per una funzione test  $\phi \in C_c^0(\mathbb{R}^2)$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} \phi(t, x) d[\eta(u)_t + q(u)_x] &= \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus J} \phi(t, x) \eta'(u) d[u_t + f(u)_x] \\ &+ \sum_i \int_{t_i^-}^{t_i^+} \phi(\gamma_i(t)) \left( -\gamma_i'(t) [\eta(u(\gamma_i(t)^+)) - \eta(u(\gamma_i(t)^-))] \right. \\ &\quad \left. + [q(u(\gamma_i(t)^+)) - q(u(\gamma_i(t)^-))] \right) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i^-}^{t_i^+} \phi(\gamma_i(t)) \mathcal{A}(u(\gamma_i^-(t)), u(\gamma_i^-(t))) dt, \end{aligned}$$

dove si sono ripercorsi i conti fatti nel primo esempio e si è usata la formula (2.2.2). Segue quindi nuovamente l'espressione

$$\mu([s, t] \times \mathbb{R}) = \sum_i \int_{\max\{t_i^-, s\}}^{\min\{t_i^+, t\}} \mathcal{A}(u(\gamma_i^-(\tau)), u(\gamma_i^-(\tau))) d\tau, \quad (2.2.5)$$

dove la somma è sulle  $i$  t.c.  $(t_i^-, t_i^+) \cap (s, t) \neq \emptyset$ . □

A questo punto, se si considera la derivata rispetto al tempo per ogni  $t$  che non appartenga all'insieme numerabile

$$\bigcup_i \{t_i^-, t_i^+\},$$

sfruttando la continuità da destra di  $\mathcal{D}$  (Corollario 2.3.15), si ottiene facilmente<sup>(1)</sup> che

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{D}}(u(t)) &\equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \hat{\mathcal{D}} \equiv \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mu(u)([t, t+h] \times \mathbb{R})}{h} \\ &= \sum_{i: t \in (t_i^-, t_i^+)} \mathcal{A}(u_i^-(t), u_i^+(t)) \equiv \mathcal{D}(u(t)). \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Dalla continuità da destra di  $\mathcal{D}(u(t))$  segue anche che la funzione  $\hat{\mathcal{D}}(u(t))$  ammette un rappresentante continuo da destra. Vedremo inoltre che è a variazione limitata (Corollario 2.3.16).

Osservando che la derivazione rispetto al tempo è equivalente a considerare la  $t$  marginale<sup>(2)</sup> di  $\mu([0, t] \times \mathbb{R})$ , possiamo definire la dissipazione istantanea come segue.

**Definizione 2.2.6** *Data  $u \in \text{BV}(\mathbb{R})$  soluzione debole entropica di una legge di conservazione scalare chiamiamo **dissipazione istantanea di entropia**,  $\hat{\mathcal{D}}(u(t))$ , la densità della  $t$ -marginale di  $\mu(u)$ . È quasi ovunque definita e coincide con  $\mathcal{D}(u(t))$ .*

Con questa definizione, si conclude che il funzionale geometrico  $\mathcal{D}$  è davvero la dissipazione, più precisamente il rappresentante continuo da destra della dissipazione istantanea  $\hat{\mathcal{D}}$ . Si ha cioè

$$\mu((s, t) \times \mathbb{R}) = \int_s^t \mathcal{D}(u(\tau)) d\tau. \quad (2.2.7)$$

D'ora in poi useremo solo  $\mathcal{D}$ .

<sup>1</sup>Applicando il teorema di integrazione per serie ([15], Teorema 1.38) vediamo che  $\sum_i \int_0^t \mathcal{A}_i = \int_0^t \sum_i \mathcal{A}_i$ . Derivando abbiamo quindi  $\frac{d}{dt} \sum_i \int_0^t \mathcal{A}_i = \frac{d}{dt} \int_0^t \sum_i \mathcal{A}_i = \sum_i \mathcal{A}_i$ , per la continuità da destra.

<sup>2</sup>Si veda la Definizione 1.2.7.

### 2.2.3 Confronto tra $\mathcal{D}$ e $Q$ : un esempio

Per concludere questa sezione, consideriamo il comportamento della dissipazione  $\mathcal{D}$  e del funzionale di Glimm  $Q$  su soluzioni ottenute con il wavefront tracking, cioè con  $f$  lineare a tratti. Nel prossimo capitolo tratteremo in dettaglio le stime su  $\mathcal{D}$ , mentre qui vogliamo mostrare come i due funzionali si comportino a seconda del tipo di interazione (con cancellazione o senza cancellazione).

**$Q$  e  $\mathcal{D}$  sulle approssimanti  $u_\nu$  del *wave-front tracking*.**  $Q$  e  $\mathcal{D}$  sono entrambi definiti solo in base ai salti di  $u_\nu(t)$ : finchè le linee di discontinuità non si intersecano essi non variano. Come si comportano sulle interazioni? Supponiamo  $u_\nu$  abbia unicamente  $q$  linee di discontinuità che si intersecano in un solo punto al tempo  $t$ . Distinguiamo due situazioni<sup>(3)</sup>, illustrate nella Figura 2.3:

- salti monotoni: tutti i salti  $u^i, u^{i+1}$  prima del tempo  $t$  sono crescenti. Ricordiamo dalla Sezione 1.4.2 come dal fatto che l'intersezione ha luogo segue che i coefficienti angolari delle linee di discontinuità da  $-\infty$  a  $+\infty$  aumentano; usando la condizione di Rankine-Hugoniot si vede che le corde relative ai vari salti prima di  $t$  disegnano una funzione concava che sta sotto  $f$ : il problema di Riemann che nasce al tempo  $t$  sarà dunque risolto dal solo salto  $u^0, u^q$ . Ne segue che  $Q$  decresce dall'area del poligono di vertici  $(u^i, f(u^i))$  a 0, mentre  $\mathcal{D}$  cresce dalla somma delle aree comprese tra  $f$  e le varie corde relative ai salti minori all'area tra  $f$  e la corda relativa al salto totale, i.e. di una quantità pari all'area del detto poligono. La variazione dei due funzionali risulta dunque essere uguale e opposta.
- salti con cancellazione:  $\exists j$  t.c.  $u^j \notin (u^0, u^q)$ . Iniziamo dal caso facile di due salti:  $u^0 < u^2 < u^1$ .  $Q$  come prima decresce dell'area del triangolo di vertici  $(u^i, f(u^i))$ ; è facile convincersi tuttavia che questa volta  $\mathcal{D}$  non

---

<sup>3</sup>I casi con le disuguaglianze opposte chiaramente si ottengono considerando il problema di Cauchy con dato iniziale  $-\bar{u}$  invece di  $\bar{u}$  e flusso  $-f(-y)$  invece di  $f(y)$ .

aumenta, ancora di più: decresce anche lui dell'area di quel triangolo. Se ci sono più salti introduciamo confronti con situazioni intermedie fittizie: partiamo dai primi due salti e ricorsivamente ne aggiungiamo uno successivo; accadrà che ad ogni salto aggiunto  $Q$  e  $\mathcal{D}$  variano in valore assoluto della stessa quantità, ma non è possibile che le variazioni abbiano sempre segno opposto, come accadeva per salti monotoni. È importante tuttavia sottolineare che le variazioni hanno lo stesso segno quando il salto che si va ad aggiungere è opposto alla somma dei precedenti, la decrescita di  $\mathcal{D}$  è accompagnata dunque da cancellazioni nella variazione totale. Alla fine  $\mathcal{D}$  può decrescere, al più quanto decresce  $Q$ .

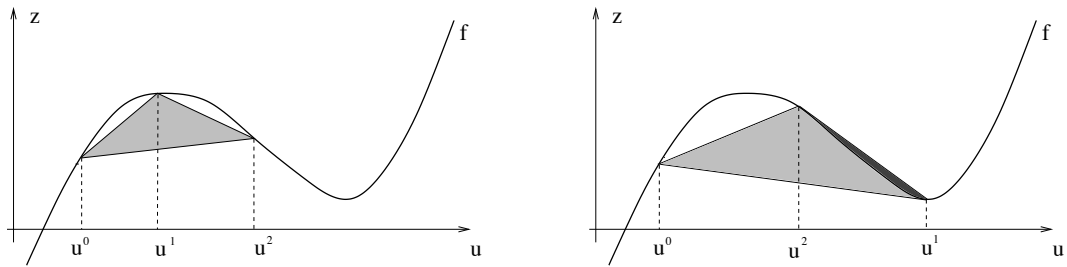


Figura 2.3: A sinistra si mostra un'interazione senza cancellazione:  $Q$  e  $\mathcal{D}$  variano di quantità opposte pari all'area del triangolo. A destra un'interazione con cancellazione:  $Q$  decresce ancora dell'area del triangolo,  $\mathcal{D}$  piuttosto che crescere decresce.

Questo esempio motiva il resto del presente capitolo: si mostrerà che nel funzionale di Glimm il ruolo di  $Q$  può esser svolto da  $-\mathcal{D}$ . La presenza della variazione totale con un giusto peso si vedrà compensare, all'occorrenza, i cali della dissipazione e il nuovo funzionale risulterà decrescente, come voluto.

## 2.3 Funzionale di Glimm: $\mathcal{D}$ nel ruolo di $Q$

In questa sezione introduciamo il funzionale basato sulla dissipazione.

**Definizione 2.3.1** Sia  $J \subset \mathbb{R}$  aperto,  $u \in BV(J)$  con  $TV(u) \leq T$ . Definiamo

$$\mathcal{E}_{f,T}(u; J) := TV(u; J) - \bar{c}\mathcal{D}(u; J) \quad \text{con } \bar{c} := \frac{3}{\|f''\|_\infty T^2}.$$

La costante  $\bar{c}$  è scelta in modo da ottenere un funzionale positivo decrescente per soluzioni entropiche; essa dipende dalla variazione totale del dato iniziale e la positività di  $\mathcal{E}_{f,T}$  è conseguenza del fatto che la variazione totale delle soluzioni entropiche non aumenta (si veda il Corollario 2.3.9). Lo scopo attuale è mostrare che esso fornisce un funzionale di Liapunov, nel senso che è decrescente nel tempo per soluzioni entropiche.

Per dimostrare questa proprietà, dimostreremo alcuni lemmi sul comportamento di  $TV$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{E}_{f,T}$ . Osserviamo preliminarmente che questi tre funzionali si possono definire in modo chiaro anche su funzioni  $BV(J)$  con  $J$  aperto reale, piuttosto che su  $BV(\mathbb{R})$ . Partizionando  $\mathbb{R}$  in intervalli determinati da punti di continuità per  $u \in BV(\mathbb{R})$  uno di loro valutato su  $u$  è la somma delle sue restrizioni valutate sulle restrizioni di  $u$ .

Nota: In seguito quando valuteremo  $\mathcal{E}_{f,T}$  su una funzione  $u$  supporremo, anche senza esplicitarlo, che sia  $TV(u) \leq T$ . Notiamo che su questo dominio grazie alla scelta di  $\bar{c}$  valgono disuguaglianze tipo  $TV \geq \alpha \bar{c} T^j TV^{3-j}$  con  $j = 0, 1, 2, 3$  e  $\alpha \leq \frac{1}{\bar{c} T^2} = \frac{\|f''\|_\infty}{3}$ .

### 2.3.1 Stime su $\mathcal{D}$

In questa sezione studieremo meglio la dissipazione istantanea di una generica funzione in  $BV(J)$  con  $J$  intervallo aperto, eventualmente tutto  $\mathbb{R}$ . Si può facilmente vedere che  $\mathcal{D}$  non è semicontinuo nè inferiormente nè superiormente per convergenza  $L^1_{\text{loc}}$ . Si considerino ad esempio in  $[-1, 1]$ , con il flusso  $\eta(u) = \frac{u^2}{2}$ , le successioni:

- $u_k := \chi_{[0, \frac{1}{k}]}$ ,  $u := 0$ ; per essa vale che  $\mathcal{D}(u_k) = c > 0 = \mathcal{D}(u)$ ;
- $u_k := \chi_{[-1, 0)} + (1 - kx)\chi_{[0, \frac{1}{k}]}$ ,  $u := \chi_{[-1, 0)}$ ; per essa vale invece che  $\mathcal{D}(u) > 0 = \mathcal{D}(u_k)$ .

Vogliamo tuttavia mostrare in seguito che è semicontinuo il funzionale  $\mathcal{E}_{f,T}$  con esso costruito. A questo scopo servirà disporre di stime su  $\mathcal{D}$ ; per ottenerle dobbiamo stimare delle aree sottese da  $f$  e da sue corde. Iniziamo quindi ora con due lemmi elementari su quadrature per poi presentare tali stime.

Quando avremo ottenuto la semicontinuità di  $\mathcal{E}_{f,T}$ , per mostrare infine l'altra sua fondamentale proprietà — la monotonia lungo le soluzioni di una legge di conservazione — servirà poter approssimare una funzione a variazione totale limitata con una successione di funzioni semplici che si converga a lei in  $L^1_{\text{loc}}$ , ma per cui si abbia la convergenza anche di  $\mathcal{D}$ . Questa costruzione concluderà la presente sezione.

Passiamo quindi ai lemmi e alle stime annunciate.

**Lemma 2.3.2 (Formula dei trapezi)** *L'area compresa tra il grafico di  $f$  e una sua corda da  $a$  a  $b$  è dominata da  $\frac{\|f''\|_{C^0}}{12}|b-a|^3$ . La porzione di quest'area compresa in un sottointervallo  $(c, b)$  è dominata da  $\frac{\|f''\|_{C^0}}{4}(b-a)(c-b)^2$ .*

DIM. Essendo<sup>(4)</sup>

$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) = \frac{f''(\xi)}{2}(x - a)(x - b)$$

si ha

$$\begin{aligned} \int_a^b \left[ f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \right] dx &= \\ &= \frac{f''(\xi)}{2} \int_a^b (x - a)(x - b) dx = -\frac{f''(\xi)}{12}(b - a)^3 \end{aligned}$$

e quindi la tesi. Vale inoltre  $\forall c \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \left| \int_c^b \left[ f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x - f(a) \right] dx \right| &= \\ &= \left| \frac{f''(\xi)}{2} \int_c^b (x - a)(x - b) dx \right| = \left| \frac{f''(\xi)}{4} \left( c - a - \frac{c - b}{3} \right) (c - b)^2 \right| \\ &\leq \frac{\|f''\|_{\infty}}{4} (b - a)(c - b)^2. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Portando a secondo membro anche i due termini di interpolazione lineare in  $a, b$  si ottiene a destra l'espressione di una parabola interpolante  $f$  in  $a, b, x$ , per un opportuno  $\xi$  in  $(a, b)$ .

□

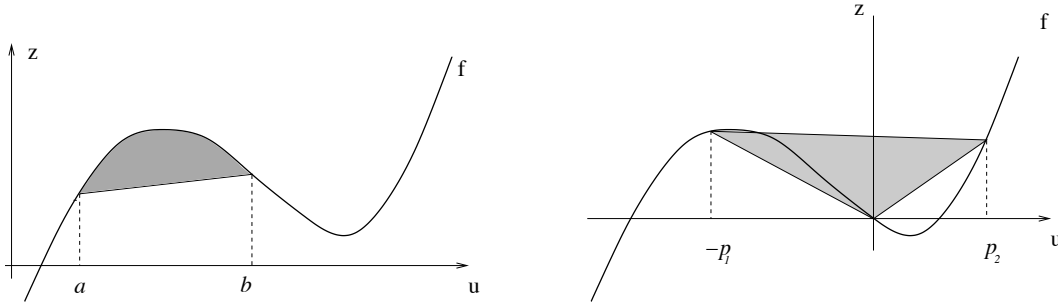


Figura 2.4: Visualizzazione delle aree dei lemmi.

**Lemma 2.3.3** *Dati tre punti sul grafico di  $f$  l'area del triangolo da essi disegnato è dominata da  $\frac{\|f''\|_{C^0}}{4}(p_1 + p_2)p_1p_2$ , dove  $p_1, p_2$  sono le proiezioni dei due lati minori<sup>(5)</sup>.*

**DIM.** Supponiamo a meno di traslazioni in dominio e codominio che i punti siano  $(-p_1, f(p_1))$ ,  $(0, 0)$ ,  $(p_2, f(p_2))$ ; l'area cercata sarà dunque data da  $\frac{1}{2}|p_2f(p_1) - p_1f(p_2)|$ ; sviluppando  $f$  con la formula di Laurent si ha

$$\begin{aligned} |p_2f(p_1) - p_1f(p_2)| &= |p_2[f'(0)p_1 + \frac{f''(\xi_1)}{2}p_1^2] - p_1[f'(0)p_2 + \frac{f''(\xi_2)}{2}p_2^2]| \\ &= \frac{1}{2}|f''(\xi_1)p_2p_1^2 - f''(\xi_2)p_2p_1^2| \\ &\leq \|f''\|_{\infty} \frac{(p_1 + p_2)}{2} p_1p_2. \end{aligned}$$

<sup>5</sup>Se due estremi  $a, b$  sono sul grafico di  $f$  e l'altro nell'intersezione di due corde su  $f$ , una da  $c$  a  $b$ , l'altra da  $a$  a  $d$ , con  $(c, d) \subset (a, b)$ , l'area si stima invece con  $\frac{\|f''\|_{\infty}}{4}(d-c)(b-a)^2$ , analogamente al caso di area parziale del trapezio. A meno di traslazioni supponiamo il terzo vertice nell'origine. L'area del triangolo è dunque pari a  $\frac{1}{2}|bf(a) - af(b)|$ . Per costruzione tuttavia valgono  $f(b) = \frac{f(b)-f(c)}{b-c}b = f'(\xi)b$  e  $f(a) = \frac{f(a)-f(d)}{a-d}a = f'(\zeta)a$  con  $\xi, \zeta \in (c, d)$ , da cui l'area

$$\frac{1}{2}|bf(a) - af(b)| = \frac{1}{2}|f'(\xi) - f'(\zeta)|ab = \frac{1}{2}|f''(\eta)|ab|\xi - \zeta| \leq \frac{\|f''\|_{\infty}}{4}(d-c)(b-a)^2.$$



quindi quanto cercato.  $\square$

Presentiamo ora due elementari stime su  $\mathcal{D}$  che ci serviranno in seguito. Nel Lemma 2.3.4 si evidenzia come  $\mathcal{D}$  sia controllato dal cubo della variazione totale. Con il Lemma 2.3.5 si mostra invece che approssimando bene un salto di una funzione BV il contributo alla dissipazione dovuto a quel salto varia di poco.

**Lemma 2.3.4** *Dati  $J$  aperto di  $\mathbb{R}$  e  $u \in \text{BV}(J)$  vale  $\mathcal{D}(u; J) \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}(u; J)^3$ .*

DIM. Supponiamo di avere un salto crescente da  $u^-$  a  $u^+$ . Siano  $(u_i, u_{i+1})$  gli intervalli in cui  $f > f_*$ , dove  $f_*$  è l'involuppo convesso (Lemma 1.3.2). Restringendomi a  $(u_i, u_{i+1})$  la situazione è facile:  $f_*$  è la corda di  $f$  da  $u_i$  a  $u_{i+1}$ , quindi per il Lemma 2.3.2 sappiamo stimare l'area tra  $f$  e  $f_*$  in questo intervallo con  $\frac{\|f''\|_\infty}{12} |u_{i+1} - u_i|^3$ ; da ciò

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(u^-, u^+) &\equiv \sum_i \mathcal{A}(u_i, u_{i+1}) \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \sum_i |u_{i+1} - u_i|^3 \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \left( \sum_i |u_{i+1} - u_i| \right)^3 \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} |u^+ - u^-|^3. \end{aligned}$$

Segue dunque

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(u) &= \sum_{\text{discontinuità}} \mathcal{A}(u(x^-), u(x^+)) \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \sum_{\text{discontinuità}} |u(x^-) - u(x^+)|^3 \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \left( \sum_{\text{discontinuità}} |u(x^-) - u(x^+)| \right)^3 \\ &\leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}(u)^3. \end{aligned}$$

□

**Lemma 2.3.5** *Si considerino due funzioni  $u = a\chi_{(\infty,0)} + b\chi_{[0,+\infty)}$ ,  $u' = a'\chi_{(\infty,0)} + b'\chi_{[0,+\infty)}$ . Se i due salti di ampiezza  $\delta = b - a$ ,  $\delta' = b' - a'$  hanno estremi vicini meno di  $\varepsilon$  la differenza tra le rispettive dissipazioni è dominata da  $\|f''\|_\infty \delta' \delta \varepsilon + \frac{\|f''\|_\infty}{6} \varepsilon^3$ .*

DIM. Supponiamo solo un estremo sia differente: quanto voluto si otterrà applicando il risultato due volte (ogni volta variando un estremo) a meno di raddoppiare la costante che otterremo ora. Siano dunque ad esempio  $a < a' < b$ ,  $|a - a'| < \varepsilon$ . La differenza tra le due dissipazioni risulta pari alla somma da un lato della dissipazione in  $(a, a')$  e dall'altro dell'area compresa tra  $f_*$ , l'involuppo convesso di  $f$  in  $(a, b)$ , e la curva  $\tilde{f}$  costituita in  $(a, a')$ ,  $(a', b)$  dagli involuppi convessi di  $f$  nei due singoli sottointervalli. Si veda la Figura 2.5. Il primo addendo,  $\mathcal{A}(a, a')$ , per il Lemma 2.3.4 è dominato da  $\frac{\|f''\|_\infty}{12} (a - a')^3 \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon^3$ . Per il secondo addendo serve osservare che quell'area è compresa in quella di un triangolo con un vertice in  $a'$  e gli altri<sup>(6)</sup> sempre su  $f$ , uno a sinistra l'altro a destra di  $a'$ ; esso per il Lemma 2.3.3 viene quindi maggiorato da  $\frac{\|f''\|_\infty}{2} (b - a')(b - a)\varepsilon = \frac{\|f''\|_\infty}{2} \delta' \delta \varepsilon$ . □

Presentiamo infine come approssimare una funzione  $u$  a variazione totale limitata con una successione di funzioni semplici  $u_\nu$ , possibilmente a valori in una griglia data, in modo che sia  $\mathcal{D}(u_\nu) \rightarrow \mathcal{D}(u)$ .

**Lemma 2.3.6 (Approssimazione costante a tratti)** *Data  $\bar{u}(x)$  a variazione totale limitata in un intervallo aperto  $J$  e  $\{\varepsilon_\nu\} \rightarrow 0$  possiamo approssimare  $\bar{u}$  con una successione  $u_\nu(x)$  di funzioni a gradino t.c.*

1.  $\bar{u}_\nu \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(J)} \bar{u}$ ;

---

<sup>6</sup>Si osserva che  $f_*$  è anche l'involuppo convesso di  $\tilde{f}$ ; poichè  $\tilde{f}$  è costituita da due funzioni convesse raccordate in  $a'$ , allora  $(\tilde{f} - f_*)^{-1}(0, +\infty)$  se non vuoto è esattamente un intervallo, i cui estremi sono i punti voluti.

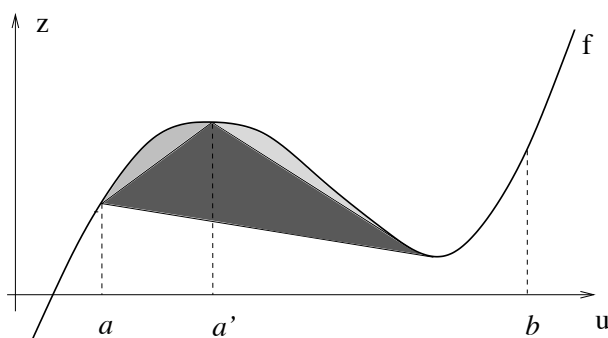


Figura 2.5: Illustrazione Lemma 2.3.5

2.  $\text{TV}(\bar{u}_\nu) \leq \text{TV}(\bar{u})$ ;
3. In corrispondenza di ogni salto di  $u$  di ampiezza  $\delta > \varepsilon_\nu$ ,  $u_\nu$  avrà un salto;  $u_\nu$  avrà, con al più un'eccezione, salti di ampiezza  $\hat{\delta} = \varepsilon_\nu$  tranne nei punti di salto di  $u$ , dove il salto potrà essere superiore ma varrà  $|\hat{\delta} - \delta| \leq \varepsilon_\nu$ ; in tutto i salti saranno al più  $1 + \text{TV}(u)/\varepsilon_\nu$ ;
4.  $\lim_{x \rightarrow \inf J^+} \bar{u}_\nu(x) = \lim_{x \rightarrow \inf J^+} \bar{u}(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow \sup J^-} \bar{u}_\nu(x) = \lim_{x \rightarrow \sup J^-} \bar{u}(x)$ .

DIM. Sia  $\bar{x}$  di continuità di  $\bar{u}$ . Dato  $\nu$  poniamo

$$x_0 := \inf J, \quad x_i := \min \{x > x_{i-1} : |u(x) - u(x_{i-1})| \geq \varepsilon_\nu\};$$

aggiungiamo eventualmente  $x_{\bar{1}} := \bar{x}$  e  $x_{N_\nu} := \sup J$ , conservando l'ordine a meno di rinominarli; sono ammessi  $x_0 = -\infty$  e  $x_{N_\nu} = +\infty$ . Definiamo quindi

$$\bar{u}_\nu := \sum_{i=1}^{\bar{1}} \left( \lim_{z \rightarrow x_{i-1}^+} u(z) \right) \chi_{[x_{i-1}, x_i)} + \sum_{i=\bar{1}}^{N_\nu-1} \left( \lim_{z \rightarrow x_{i+1}^-} u(z) \right) \chi_{[x_i, x_{i+1})}.$$

Per costruzione è  $\|\bar{u} - \bar{u}_\nu\|_\infty \leq \varepsilon_\nu$ , indi la convergenza  $L_{\text{loc}}^1(J)$ .

2. segue dalla definizione puntuale in una variabile di TV e dal fatto che  $\bar{u}_\nu$  assume un sottoinsieme dei valori assunti da  $u$ .

Se  $u$  ha in  $x$  un salto di ampiezza  $\geq \varepsilon_\nu$  allora  $x$  risulterà tra gli  $x_i \neq x_{\bar{1}}$ . Essendo  $u_\nu(x_i^+) \equiv u(x_i^+)$  e  $|u_\nu(x_i^-) - u(x_i^-)| \equiv |u(x_{i-1}) - u(x_i^-)| \leq \varepsilon_\nu$  se  $x_i < \bar{x}$

oppure  $u_\nu(x_i^-) \equiv u(x_i^-)$  e  $|u_\nu(x_i^+) - u(x_i^+)| \equiv |u(x_{i+1}^-) - u(x_i^+)| \leq \varepsilon_\nu$  se  $x_i > \bar{x}$  si ottiene 3.,  $\bar{x}$  può essere l'eccezione. 4. è immediato.  $\square$

**Osservazione 2.3.7** *Supponiamo che si voglia  $u_\nu$  a valori nella griglia  $\varepsilon_\nu \mathbb{Z}$ . Possiamo prima effettuare la costruzione sopra, poi modificare opportunamente i valori di ciascuna funzione semplice risultante, descriviamo come.*

Sia  $\lambda_\nu^-(y)$  (risp.  $\lambda_\nu^+(y)$ ) la funzione che associa a  $y$  il più grande (risp. il più piccolo) valore della griglia non superiore (risp. non inferiore) a  $y$ . Se  $u_\nu = \sum_{i=1}^N u^i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$  definiamo una funzione  $\tilde{u}_\nu := \sum_{i=1}^N \lambda^i \chi_{[x_{i-1}, x_i]}$  dove  $\lambda^1 := \lambda^-(u^1)$  e si sceglie ricorsivamente  $\lambda^i = \lambda^{i-1} + \lambda^\pm(u^i - u^{i-1})$  in modo che soddisfi<sup>(7)</sup>

$$\mathrm{TV}(u_\nu \upharpoonright_{(x_0, x_i)}) \geq \mathrm{TV}\left(\sum_{k=1}^i \lambda^k \chi_{[x_{k-1}, x_k]}\right) \geq \mathrm{TV}(u_\nu \upharpoonright_{(x_0, x_i)}) - 2\varepsilon_\nu.$$

Notiamo che  $\|u_\nu - \tilde{u}_\nu\|_\infty \leq 3\varepsilon_\nu$ ,  $\mathrm{TV}(\tilde{u}_\nu) \leq \mathrm{TV}(u_\nu)$ ,  $|\tilde{\delta} - \hat{\delta}| \leq \varepsilon_\nu$ . Da ciò segue che  $u_\nu$  soddisfa ancora i punti 1, 2 del lemma; il 3 con la differenza che è garantito un salto di  $u_\nu$  solo quando  $u$  ha un salto  $\geq 2\varepsilon_\nu$  e che nei punti di salto vale  $|\delta - \tilde{\delta}| \leq 2\varepsilon_\nu$ ; il 4 nel caso in cui sia  $\lim_{x \rightarrow \inf J^+ / \sup J^-} \bar{u}(x) \in \varepsilon_\nu \mathbb{Z} \forall \nu$ , altrimenti comunque vale  $\lim_{x \rightarrow \inf J^+ / \sup J^-} u_\nu(x) \rightarrow \lim_{x \rightarrow \inf J^+ / \sup J^-} \bar{u}(x)$  per  $\nu \rightarrow \infty$ .  $\square$

**Corollario 2.3.8** *Dati  $J$  aperto di  $\mathbb{R}$  e  $u \in \mathrm{BV}(J)$  se approssimiamo  $u$  come nel Lemma 2.3.6 o nell'Osservazione 2.3.7 abbiamo  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} |\mathcal{D}(u) - \mathcal{D}(u_\nu)| = 0$ .*

DIM. Sia  $\varepsilon > 0$ , siano  $\{x_k\}_{k=1}^N$  un sottoinsieme finito di punti discontinuità di  $u$  tali che  $|\mathcal{D}(u) - \sum_1^N \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+))| \leq \varepsilon$ . Per

$$\varepsilon_\nu < \frac{1}{4} \inf_{k=1, \dots, N} |u(x_k^+) - u(x_k^-)|$$

<sup>7</sup>Ciò è possibile perché  $u_\nu$  è costante a tratti e per le costruzioni precedenti valgono le relazioni  $|\lambda_\nu^\pm(y) - y| \leq \varepsilon_\nu$  e  $\mathrm{TV}(u; (x_0, x_{i-1})) \geq \mathrm{TV}(\tilde{u}_\nu; (x_0, x_{i-1})) \geq \mathrm{TV}(u; (x_0, x_{i-1})) - 2\varepsilon_\nu$ .

il punto 3. del Lemma 2.3.6 (o dell'Osservazione 2.3.7) garantisce che  $\{x_k\}_{k=1}^N$  sono punti di discontinuità anche di  $u_\nu$  e che lì  $u_\nu$  ha un salto  $> \varepsilon_\nu$ . Consideriamo

$$\begin{aligned} |\mathcal{D}(u_\nu) - \mathcal{D}(u)| &\leq \left| \mathcal{D}(u_\nu) - \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u_\nu(x_k^-), u_\nu(x_k^+)) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u_\nu(x_k^-), u_\nu(x_k^+)) - \mathcal{D}(u) \right|. \end{aligned}$$

Ancora grazie alle proprietà 3. del Lemma 2.3.6, in particolare al fatto che  $u_\nu$  ha al più  $1 + \frac{\text{TV}(u)}{\varepsilon_\nu}$  discontinuità, possiamo dire

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(u_\nu) - \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u_\nu(x_k^-), u_\nu(x_k^+)) &= \sum_{\text{salti di } u_\nu \leq \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u_\nu(x_k^-), u_\nu(x_k^+)) \\ &\stackrel{L.2.3.4}{\leq} \sum_{\text{salti} \leq \varepsilon_\nu} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon_\nu^3 \leq \frac{\|f''\|_\infty}{12} \left(1 + \frac{\text{TV}(u)}{\varepsilon_\nu}\right) \varepsilon_\nu^3, \end{aligned}$$

per il secondo addendo si ha poi, per costanti  $c, c'$  dipendenti solo da  $\|f''\|_\infty$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u_\nu(x_k^-), u_\nu(x_k^+)) - \mathcal{D}(u) \right| \\ &\leq \left| \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u_\nu(x_k^-), u_\nu(x_k^+)) - \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) - \mathcal{D}(u) \right| \\ &\stackrel{L.2.3.5}{\leq} \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} c|u_k^+ - u_k^-| \varepsilon_\nu + c' \varepsilon_\nu^3 + \left| \sum_{\text{salti di } u_\nu > \varepsilon_\nu} \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) - \mathcal{D}(u) \right| \\ &\leq c \text{TV}(u) \varepsilon_\nu + c' (\varepsilon_\nu + \text{TV}(u)) \varepsilon_\nu^2 + \left( \mathcal{D}(u) - \sum_{k=1}^N \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) \right) \\ &\leq c \text{TV}(u) \varepsilon_\nu + c' \text{TV}(u) \varepsilon_\nu^2 + c' \varepsilon_\nu^3 + \varepsilon \quad (\text{per scelta degli } x_k \text{ e di } \varepsilon_\nu). \end{aligned}$$

Grazie al fatto che le costanti in gioco non dipendono da  $\nu$  per  $\varepsilon_\nu$  sufficientemente piccolo abbiamo

$$|\mathcal{D}(u_\nu) - \mathcal{D}(u)| \leq 2\varepsilon.$$

□

### 2.3.2 $\mathcal{E}_{f,T}$ come funzionale di Liapunov

Rivolgiamo ora la nostra attenzione al funzionale  $\mathcal{E}_{f,T}$ . Lo scopo è mostrare la sua semicontinuità per convergenza  $L^1_{\text{loc}}$  e, grazie ad essa, come esso decresca lungo le soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare. Iniziamo riconsiderando gli esempi in cui cadeva qualsiasi semicontinuità di  $\mathcal{D}$ :

- $u_k := \chi_{[0, \frac{1}{k}]}$ ,  $u := 0$ ; ora è (Corollario 2.3.9)  $\mathcal{E}_{f,T}(u) = 0 \leq c = \mathcal{E}_{f,T}(u_k)$ .
- $u_k := \chi_{[-1,0]} + (1 - kx)\chi_{[0, \frac{1}{k}]}$ ,  $u := \chi_{[-1,0]}$ ; ora è  $\mathcal{E}_{f,T}(u) \leq \mathcal{E}_{f,T}(u_k) = 1$ .

$\mathcal{E}_{f,T}$  risulterà effettivamente semicontinuo inferiormente (Proposizione 2.3.12). Sulle approssimanti del *wave-front tracking* si è già accennato a come  $\mathcal{D}$  si comporti in modo affine a  $Q$ . Unendo le due proprietà mostreremo che effettivamente il ruolo giocato da  $Q$  nel funzionale di Glimm può essere svolto da  $\mathcal{D}$  (Teorema 2.3.14).

A questo punto è chiaro perché se  $u$  è una soluzione entropica di una legge di conservazione scalare allora  $\mathcal{D}(u(t))$  è continuo da destra:  $\mathcal{D}$  è la differenza di  $\mathcal{E}_{f,T}(u(t))$  e  $\text{TV}(u(t))$  ed entrambi lo sono. Infatti abbiamo da un lato che sia  $\mathcal{E}_{f,T}(u(t))$  sia  $\text{TV}(u(t))$  sono decrescenti, dall'altro che sono inferiormente semicontinui per convergenza  $L^1_{\text{loc}}$  e che  $u(t_k) \rightarrow u(t)$  in  $L^1_{\text{loc}}$  per  $t_k \rightarrow t$ : allora, ad esempio per  $\mathcal{E}_{f,T}$ , se  $t_k \rightarrow t^+$  vale

$$\mathcal{E}_{f,T}(u(t_k)) \stackrel{\text{monotonia}}{\leq} \mathcal{E}_{f,T}(u(t)) \stackrel{\text{semicont.}}{\leq} \liminf_k \mathcal{E}_{f,T}(u(t_k))$$

Torniamo ora alla linea di dimostrazione. Si presentano preliminarmente alcune proprietà di  $\mathcal{E}_{f,T} : \text{BV}(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ . Si inizia dalla sua positività, si evidenzia poi il suo comportamento rispetto ad alcune approssimazioni dell'argomento per arrivare quindi alle sue due fondamentali caratteristiche: è inferiormente semicontinuo per convergenza  $L^1_{\text{loc}}$  e decresce lungo le soluzioni entropiche di una legge di conservazione scalare (Proposizioni 2.3.12 e 2.3.14).

**Corollario 2.3.9**  $\mathcal{E}_{f,T}$  è un funzionale nonnegativo su  $\text{BV}(\mathbb{R})$ .

DIM.  $\mathcal{E}_{f,T} \geq \text{TV} - \bar{c} \frac{\|f''\|_{\infty}}{12} \text{TV}^3$  per definizione di  $\mathcal{E}_{f,T}$  e per il Lemma 2.3.4;

ricordando che  $0 \leq \text{TV} \leq T$  e la scelta di  $\bar{c}$  si ha  $\text{TV} - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}^3 \geq \frac{\text{TV}}{2} \geq 0$  e quindi la tesi.  $\square$

**Lemma 2.3.10 (Accorpamento di salti)** *Sia dato  $J$  intervallo reale e  $u$  costante a tratti in  $J$ . Se accorpamo i salti  $(u^0, u^1), \dots, (u^{q-1}, u^q)$  di  $u$  in una funzione  $\hat{u}$  con un solo salto  $(u^0, u^q)$ , allora il funzionale  $\mathcal{E}_{f,T}$  non aumenta:  $\mathcal{E}_{f,T}(u) \geq \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u})$  (Fig. 2.6).*

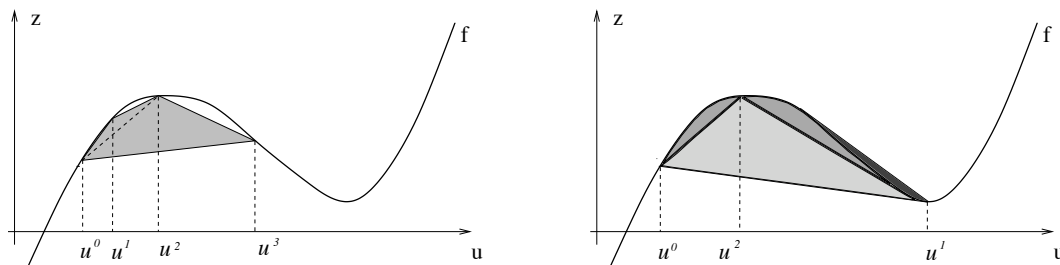


Figura 2.6: Accorpare dei salti  $\mathcal{E}_{f,T}$  non cresce.

DIM. Consideriamo  $u^0 < u^q$ . La tesi è banalmente vera nel caso di un solo salto; supponiamo dunque ce ne siano  $q > 1$ . Se anche l'ultimo salto  $u^{q-1}, u^q$  è crescente allora la differenza tra la dissipazione di  $\hat{u}$  e quella di  $u$  è pari all'area delimitata sopra dalla curva costituita separatamente in  $(u^0, u^{q-1})$  e  $(u^{q-1}, u^q)$  dall'involuppo convesso di  $f$  nei due sottointervalli e sotto dall'involuppo di  $f$  in  $(u^0, u^q)$ ; è quindi non negativa: accorpare i salti  $\mathcal{D}$  è al più aumentata. La variazione totale in questo caso rimane invariata: si ottiene dunque

$$\mathcal{E}_{f,T}(u) \equiv \text{TV}(u) - \bar{c}\mathcal{D}(u) = \text{TV}(\hat{u}) - \bar{c}\mathcal{D}(u) \geq \text{TV}(\hat{u}) - \bar{c}\mathcal{D}(\hat{u}) \equiv \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}).$$

Se l'ultimo salto è decrescente la situazione è più complessa: infatti come si è visto  $\mathcal{D}$  accorpare i salti può diminuire. Contemporaneamente alla perdita di aree tuttavia ci sono delle cancellazioni nella variazione totale e grazie alla scelta di  $\bar{c}$  vedremo ora che i due contributi si bilanciano bene. Definiamo  $\tilde{u}$  una funzione con i soli salti  $(u^0, u^{q-1}), (u^{q-1}, u^q)$ : per induzione vale  $\mathcal{E}_{f,T}(u) \geq$

$\mathcal{E}_{f,T}(\tilde{u})$ . Passando da  $\tilde{u}$  a  $\hat{u}$  la variazione totale diminuisce di  $2(u^{q-1} - u^q)$ , e ci rimane da stimare la variazione di  $\mathcal{D}$ .

La differenza  $\mathcal{D}(\tilde{u}) - \mathcal{D}(\hat{u})$  si può decomporre come la somma di tre aree:

- L'area delimitata sopra dall'involuppo concavo di  $f$  in  $(u^q, u^{q-1})$ , sotto da  $f$ , pari a  $\mathcal{A}(u^{q-1}, u^q)$ ; questa si stima con  $\frac{\|f''\|_\infty}{12}(u^{q-1} - u^q)^3$  (Lemma 2.3.4).
- L'area delimitata sopra da  $f$ , sotto dall'involuppo convesso di  $f$  in  $(u^q, u^{q-1})$ , pari a  $\mathcal{A}(u^q, u^{q-1})$ ; questa si stima con  $\frac{\|f''\|_\infty}{12}(u^{q-1} - u^q)^3$  (Lemma 2.3.4).
- L'area delimitata sotto dall'involuppo convesso  $f_*$  di  $f$  in  $(u^0, u^{q-1})$ , sopra dai due singoli involuppi convessi in  $(u^0, u^q)$ ,  $(u^q, u^{q-1})$  di  $f$ . Questa si domina<sup>(8)</sup> con  $\frac{1}{2}\|f''\|_\infty(u^q - u^0)(u^{q-1} - u^0)(u^{q-1} - u^q)$  (Lemma 2.3.3).

Complessivamente dunque  $\mathcal{D}(\tilde{u}) - \mathcal{D}(\hat{u}) \leq \frac{2}{3}T^2(u^{q-1} - u^q)$ . Ne segue

$$\mathcal{E}_{f,T}(\tilde{u}) - \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}) \geq 2(u^{q-1} - u^q) - \bar{c} \frac{2\|f''\|_\infty}{3}T^2(u^{q-1} - u^q) \geq 0,$$

da cui

$$\mathcal{E}_{f,T}(u) \geq \mathcal{E}_{f,T}(\tilde{u}) \geq \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}).$$

□

Da questo lemma segue immediatamente

**Corollario 2.3.11** *Sia dato un intervallo reale  $J$  e una funzione  $u \in \text{BV}(J)$ . Se si sostituisce  $u$  con una funzione che assume solo i valori di  $u$  agli estremi di  $J$ , allora  $\mathcal{E}_{f,T}$  non aumenta.*

**DIM.** Sia  $\varepsilon > 0$ . Approssimiamo  $u$  come nel Lemma 2.3.6: esiste una funzione  $u_\nu$  costante a tratti con un numero finito di salti, con valori

<sup>8</sup>Si osserva che  $f_*$  è anche l'involuppo convesso dei due involuppi convessi ricordati in  $u^{q-1}$ , allora coincide con essi a meno di un segmento a cavallo di  $u^{q-1}$ : l'area cercata è contenuta nel triangolo su  $f$  con quel segmento per lato e il terzo vertice in  $(u^{q-1}, f(u^{q-1}))$ .



limite agli estremi uguali a quelli di  $u$ , con variazione totale minore  $\varepsilon$ , per il Corollario 2.3.8, t.c.  $|\mathcal{D}(u) - \mathcal{D}(u_\nu)| \leq \varepsilon$ . Allora

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,T}(u; J) &\equiv \text{TV}(u; J) - \bar{c}\mathcal{D}(u; J) \\ &\geq \text{TV}(u_\nu; J) - \bar{c}\mathcal{D}(u; J) \\ &\geq \text{TV}(u_\nu; J) - \bar{c}\mathcal{D}(u_\nu; J) - \varepsilon \\ &\equiv \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu; J) - \varepsilon \\ &\stackrel{L.2.3.10}{\geq} \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}; J) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$  segue la tesi.  $\square$

**Proposizione 2.3.12 (Semicontinuità di  $\mathcal{E}_{f,T}$ )** *Siano  $u_\nu, u \in \text{BV}(\mathbb{R})$ . Allora*

$$u_\nu \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})} u \quad \implies \quad \mathcal{E}_{f,T}(u) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu)$$

**DIM.** Supponiamo inizialmente di avere che  $u_\nu \xrightarrow{L^1(\mathbb{R})} u$ . Sia  $\varepsilon$  tale che  $1 \gg \varepsilon > 0$ . A meno di sottosuccessioni possiamo supporre<sup>(9)</sup>

$$u_\nu(x) \rightarrow u(x) \quad \forall x \text{ di continuità di } u \text{ e } u_\nu. \quad (\circ)$$

Tra le discontinuità di  $u$  isoliamo quelle che raccolgono la maggior parte della misura di salto di  $u$ : siano  $x_1, \dots, x_N$  punti di discontinuità di  $u$  t.c. la somma delle ampiezze delle altre discontinuità di  $u$  sia inferiore a  $\frac{\varepsilon}{2}$ . In particolare

▷) ogni altra discontinuità di  $u$  avrà ampiezza inferiore a  $\frac{\varepsilon}{2}$ ;

◁)  $\sum_{k=1}^N \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) \geq \mathcal{D}(u) - \varepsilon$ , supponendo  $\varepsilon$  piccolo (Lemma 2.3.4).

Avvolgiamo questi punti in appropriati intervalli: siano  $y_1^\ell < x_1 < y_1^r < \dots < y_N^\ell < x_N < y_N^r$  tali che

1.  $y_k^\ell, y_k^r$  siano punti di continuità per  $u_\nu, u \quad \forall \nu$ <sup>(10)</sup>.

<sup>9</sup>Si può usare il teorema di Helly, poiché si suppone  $\text{TV}(u), \text{TV}(u_\nu) \leq T$ .

<sup>10</sup> $u_\nu, u$  sono a variazione limitata: i punti di discontinuità di ciascuna sono al più numerabili

$$2. \text{TV}(u; (y_k^\ell, x_k)) + \text{TV}(u; (x_k, y_k^r)) < \varepsilon.$$

Poniamo  $J_k := [y_k^\ell, y_k^r]$ . Definiamo ora la successione ausiliaria di funzioni

$$\hat{u}_\nu(x) := \begin{cases} u_\nu(y_k^\ell) & \text{se } x \in [y_k^\ell, x_k] \\ u_\nu(y_k^r) & \text{se } x \in [x_k, y_k^r] \\ u_\nu(x) & \text{altrove} \end{cases} \quad (2.3.1)$$

Si osservi che  $y_k^\ell, y_k^r$  sono punti di continuità anche per  $\hat{u}_\nu$ . Si osservi anche che  $\hat{u}_\nu$  dipende da  $\varepsilon$ . Dalle costruzioni seguono le seguenti stime:

$$0) \exists \bar{\nu}(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall \nu > \bar{\nu} \quad \|\hat{u}_\nu(x_k^-) - \hat{u}_\nu(x_k^+)\| - |u(x_k^-) - u(x_k^+)| \leq 4\varepsilon \quad \forall k.$$

DIM. Si osserva<sup>(11)</sup> che

$$\begin{aligned} \|\hat{u}_\nu(x_k^-) - \hat{u}_\nu(x_k^+)\| - |u(x_k^-) - u(x_k^+)| &\leq \\ &|\hat{u}_\nu(x_k^-) - u(x_k^-)| + |u(x_k^+) - \hat{u}_\nu(x_k^+)|. \end{aligned}$$

Guardiamo il primo addendo:

$$\begin{aligned} |\hat{u}_\nu(x_k^-) - u(x_k^-)| &\leq |\hat{u}_\nu(x_k^-) - u_\nu(y_k^\ell)| + |u_\nu(y_k^\ell) - u(y_k^\ell)| + |u(y_k^\ell) - u(x_k^-)| \\ &\stackrel{(2.3.1)}{\equiv} |u_\nu(y_k^\ell) - u(y_k^\ell)| + |u(y_k^\ell) - u(x_k^-)| \\ &\stackrel{2.}{\leq} |u_\nu(y_k^\ell) - u(y_k^\ell)| + \varepsilon \\ &\stackrel{(\circ)}{\leq} 2\varepsilon \quad \text{per } \nu > \nu_k^-(\varepsilon); \end{aligned}$$

analogamente

$$|\hat{u}_\nu(x_k^+) - u(x_k^+)| < 2\varepsilon \quad \text{per } \nu > \nu_k^+(\varepsilon).$$

Ponendo  $\bar{\nu} := \max\{\nu_k^-, \nu_k^+\}_{k=1, \dots, N}$  segue la tesi.  $\square$

$$1) \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu) \leq \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) \quad \forall \nu.$$

DIM. Per costruzione di  $\hat{u}_\nu$  da  $\hat{u}_\nu \upharpoonright_{\mathbb{R} \setminus \cup J_k} \equiv u_\nu \upharpoonright_{\mathbb{R} \setminus \cup J_k}$  si ha subito

$$\mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) \equiv \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k).$$

<sup>11</sup>Dati  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  vale  $\|a - b\| - \|c - d\| \leq |a - c| + |b - d|$ : se  $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq y_4$  e  $\sigma$  permutazione di  $\{1, 2, 3, 4\}$  è  $\|y_{\sigma(1)} - y_{\sigma(2)}\| - \|y_{\sigma(3)} - y_{\sigma(4)}\| \leq (y_2 - y_1) + (y_4 - y_3) \leq |y_{\sigma(1)} - y_{\sigma(3)}| + |y_{\sigma(2)} - y_{\sigma(4)}|$ .

Ricordando che gli  $y_k^\ell, y_k^r$  sono punti di continuità basta osservare ora  $\mathcal{E}_{f,T}$  nei  $J_k$ : per il Corollario 2.3.11 è  $\mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; J_k) \leq \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu, J_k)$ . Si otterrà quindi

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu) &\equiv \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) + \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; J_k) \\ &\equiv \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) + \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; J_k) \\ &\leq \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) + \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu; J_k) \\ &\equiv \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu). \end{aligned}$$

□

$$2) \exists \bar{\nu}(\varepsilon) \text{ t.c. } \forall \nu > \bar{\nu} \quad \mathcal{E}_{f,T}(u; J_k) - o_\varepsilon(1) \leq \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; J_k).$$

DIM. Iniziamo trattando la variazione totale. Per ipotesi  $u_\nu \xrightarrow{L^1(J_k)} u$ , per semicontinuità vale quindi  $\text{TV}(u) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \text{TV}(u_\nu; J_k)$ . Per le  $\hat{u}_\nu$  purtroppo non si può dire altrettanto: viene meno in generale la convergenza  $L^1_{\text{loc}}$ . In  $J_K$  tuttavia la variazione totale di  $u$  è data sostanzialmente dal salto in  $x_k$  e questo definitivamente è ben approssimato dalle  $\hat{u}_\nu$ : abbiamo quindi<sup>(12)</sup>

$$\begin{aligned} \text{TV}(u; J_k) &\stackrel{2.}{\leq} |u(x_k^-) - u(x_k^+)| + \varepsilon \\ &\stackrel{0)}{\leq} |\hat{u}_\nu(x_k^-) - \hat{u}_\nu(x_k^+)| + 5\varepsilon \quad \text{per } \nu > \bar{\nu}(\varepsilon) \\ &\stackrel{(2.3.1)}{\equiv} \text{TV}(\hat{u}_\nu; J_k) + 5\varepsilon \\ \Rightarrow \quad \text{TV}(u; J_k) &\leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \text{TV}(\hat{u}_\nu; J_k) + 5\varepsilon. \end{aligned}$$

Per la dissipazione il discorso è analogo, essendo dominata sui salti e

<sup>12</sup>Vale senza sforzo — anche se qui non serve — che per  $\nu > \bar{\nu}(\varepsilon)$   $|\text{TV}(u; J_k) - \text{TV}(\hat{u}_\nu; J_k)| \leq 5\varepsilon$ , quindi  $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \text{TV}(\hat{u}_\nu; J_k) - 5\varepsilon \leq \text{TV}(u; J_k) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \text{TV}(\hat{u}_\nu; J_k) + 5\varepsilon$ .

sugli intervalli dal cubo della variazione totale<sup>(13)</sup>:

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}(u; J_k) - \mathcal{D}(\hat{u}_\nu; J_k)| &\equiv |\mathcal{D}(u; J_k) - \mathcal{A}(\hat{u}_\nu(x_k^-), \hat{u}_\nu(x_k^+))| \\
&\leq |\mathcal{D}(u; J_k) - \mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+))| + \\
&\quad + |\mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) - \mathcal{A}(\hat{u}_\nu(x_k^-), \hat{u}_\nu(x_k^+))| \\
&\stackrel{2.+L.2.3.4}{\leq} \frac{\|f''\|}{6} \varepsilon^3 + |\mathcal{A}(u(x_k^-), u(x_k^+)) - \mathcal{A}(\hat{u}_\nu(x_k^-), \hat{u}_\nu(x_k^+))| \\
&\stackrel{0)+L.2.3.5}{\leq} \frac{\|f''\|}{6} \varepsilon^3 + 2\|f''\| \text{TV}(u)^2 \varepsilon + \frac{32\|f''\|}{3} \varepsilon^3 \quad \text{per } \nu > \bar{\nu}(\varepsilon) \\
\Rightarrow \quad \mathcal{D}(u; J_k) &\geq \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{D}(\hat{u}_\nu; J_k) - o_\varepsilon(1).
\end{aligned}$$

Unendo le due stime per  $\nu > \bar{\nu}(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{f,T}(u; J_k) &\equiv \text{TV}(u; J_k) - \bar{c} \mathcal{D}(u; J_k) \\
&\leq \text{TV}(\hat{u}_\nu; J_k) - \bar{c} \mathcal{D}(\hat{u}_\nu; J_k) + o_\varepsilon(1) \equiv \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; J_k) + o_\varepsilon(1).
\end{aligned}$$

□

$$3) \quad \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) \geq \mathcal{E}_{f,T}(u; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) - 4T\varepsilon^2.$$

DIM.  $u$  in  $\mathbb{R} \setminus \cup J_k$  ha variazione totale limitata da  $T$  e, per la scelta dei  $J_k$ , salti al più di ampiezza  $\frac{\varepsilon}{2}$ : possiamo dunque dividere tale regione in intervalli  $I_1, \dots, I_M$  aventi per estremi  $\pm\infty$  o punti di continuità di  $u$

<sup>13</sup>Come nella nota precedente: per  $\nu > \bar{\nu}(\varepsilon)$   $|\mathcal{D}(u; J_k) - \mathcal{D}(\hat{u}_\nu; J_k)| \leq o_\varepsilon(1)$ , quindi  $\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{D}(\hat{u}_\nu; J_k) + o_\varepsilon(1) \leq \mathcal{D}(u; J_k) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{D}(\hat{u}_\nu; J_k) + o_\varepsilon(1)$ .

in modo che sia  $\frac{\varepsilon}{4} \leq \text{TV}(u, I_k) \leq \varepsilon$ . Allora abbiamo

$$\begin{aligned}
& \text{TV}(u_\nu; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}(u_\nu; I_k)^3 = \\
&= [\text{TV}(u_\nu; I_k) - \text{TV}(u; I_k)] + \text{TV}(u; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}(u; I_k)^3 \\
&\quad + \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} [\text{TV}(u; I_k)^3 - \text{TV}(u_\nu; I_k)^3] \\
&= \text{TV}(u; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}(u; I_k)^3 + [\text{TV}(u_\nu; I_k) - \text{TV}(u; I_k)] \cdot \\
&\quad \cdot \left( 1 - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} (\text{TV}(u; I_k)^2 + \text{TV}(u_\nu; I_k)\text{TV}(u; I_k) + \text{TV}(u_\nu; I_k)^2) \right) \\
&\stackrel{\text{TV}(u; I_k) \leq \varepsilon}{\geq} \text{TV}(u; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon^3 + [\text{TV}(u_\nu; I_k) - \text{TV}(u; I_k)] \cdot \\
&\quad \cdot \left( 1 - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} (\text{TV}(u; I_k)^2 + \text{TV}(u_\nu; I_k)\text{TV}(u; I_k) + \text{TV}(u_\nu; I_k)^2) \right) \\
&\stackrel{u_\nu \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}} u}{\geq} \text{TV}(u; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon^3 - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon^3. \quad \text{per } \nu > \nu(h, \varepsilon) \\
&\quad \cdot \left( 1 - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} (\text{TV}(u; I_k)^2 + \text{TV}(u_\nu; I_k)\text{TV}(u; I_k) + \text{TV}(u_\nu; I_k)^2) \right) \\
&\geq \text{TV}(u; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon^3 - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \varepsilon^3 \\
&= \text{TV}(u; I_k) - \varepsilon^3.
\end{aligned}$$

Oltre alla convergenza  $L^1_{\text{loc}}$  sopra si è usato il fatto che valendo  $\bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{4} \leq 1$  il coefficiente di  $\text{TV}(u_\nu; ) - \text{TV}(u; )$  è nonnegativo. Da questo

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) &\equiv \text{TV}(u_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) - \bar{c} \mathcal{D}(u_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) \\
&= \sum_{i=1}^M \text{TV}(u_\nu; I_k) - \bar{c} \mathcal{D}(u_\nu; I_k) \\
&\stackrel{\text{L.2.3.4}}{\geq} \sum_{i=1}^M \text{TV}(u_\nu; I_k) - \bar{c} \frac{\|f''\|_\infty}{12} \text{TV}(u_\nu; I_k)^3 \\
&\geq \sum_{i=1}^M \text{TV}(u; I_k) - \varepsilon^3 \\
&\geq \text{TV}(u; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) - 4T\varepsilon^2 \\
&\geq \text{TV}(u; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) - \bar{c} \mathcal{D}(u; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) - 4T\varepsilon^2 \equiv \mathcal{E}_{f,T}(u; \mathbb{R} \setminus \cup J_k) - 4T\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

Da questo si ottiene che  $\exists \bar{\nu}(\varepsilon)$  tale che per  $\nu > \bar{\nu}(\varepsilon)$  si ha

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) &\geq \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu) && \text{per 1)} \\
&\equiv \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; J_k) + \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) && \text{cont. in } y_k^\ell, y_k^r \\
&\geq \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{f,T}(u; J_k) + \mathcal{E}_{f,T}(\hat{u}_\nu; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) - o_\varepsilon(1) && \text{per 2)} \\
&\geq \sum_{k=1}^N \mathcal{E}_{f,T}(u; J_k) + \mathcal{E}_{f,T}(u; \mathbb{R} \setminus \cup_{k=1}^N J_k) - o_\varepsilon(1) && \text{per 3)} \\
&\equiv \mathcal{E}_{f,T}(u) - o_\varepsilon(1) && \text{cont. in } y_k^\ell, y_k^r
\end{aligned}$$

quindi, osservando che il nostro  $o_\varepsilon(1)$  non dipende da  $\nu$ ,

$$\mathcal{E}_{f,T}(u) - o_\varepsilon(1) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu).$$

Prendendo il limite su una successione di  $\varepsilon$  decrescente a 0 segue

$$\mathcal{E}_{f,T}(u) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu).$$

Torniamo a considerare il caso in cui  $u_\nu \xrightarrow{L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})} u$ : per il risultato appena ottenuto vale

$$\forall k > 0 \quad \mathcal{E}_{f,T}(u; (-k, k)) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu; (-k, k)) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu).$$

Prendendo il limite per  $k \rightarrow \infty$  si ha la tesi.  $\square$

**Lemma 2.3.13** *Sia dato un intervallo  $J$  e una funzione  $u \in \text{BV}(J)$ . Si può allora approssimare  $u$  con una successione di funzioni semplici  $\{u_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$  a valori in  $2^{-\nu}\mathbb{Z}$  t.c.  $u_\nu \rightarrow u$  in  $L_{\text{loc}}^1$  e inoltre  $\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) \rightarrow \mathcal{E}_{f,T}(u)$ .*

**DIM.** Sia  $\varepsilon > 0$ . Definiamo  $u_\nu$  come nell'Osservazione 2.3.7. Vale per costruzione che  $u_\nu \xrightarrow{L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})} u$ ,  $\text{TV}(u_\nu) \leq \text{TV}(u)$  e inoltre, per il Corollario 2.3.8, che  $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{D}(u_\nu) = \mathcal{D}(u)$ ; segue che

$$\begin{aligned}
\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) &\equiv \limsup_{\nu \rightarrow \infty} \text{TV}(u_\nu) - \bar{c} \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{D}(u_\nu) \\
&\leq \text{TV}(u) - \bar{c} \mathcal{D}(u) \equiv \mathcal{E}_{f,T}(u).
\end{aligned}$$

Grazie alla Proposizione 2.3.12 si ha poi  $\mathcal{E}_{f,T}(u) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu)$ . Da questo

$$\limsup_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) \leq \mathcal{E}_{f,T}(u) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu) \implies \text{tesi.}$$

□

**Proposizione 2.3.14** *Sia  $u$  soluzione entropica del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(t=0) = \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}), \\ f \in C^2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip}_L(\mathbb{R}). \end{cases}$$

*Sia  $T := \text{TV}(\bar{u})$ . Abbiamo allora che l'applicazione  $t \rightarrow \mathcal{E}_{f,T}(u(t))$  è non crescente.*

DIM. Si vuole mostrare che, fissati  $t_1 < t_2$ , vale

$$\mathcal{E}_{f,T}(u(t_2)) - \mathcal{E}_{f,T}(u(t_1)) \leq 0.$$

Per la proprietà di semigrupp delle soluzioni del problema di Cauchy a meno di cambiare il dato iniziale possiamo fissare  $t_1 = 0$ . Usiamo l'approssimazione del *wave-front tracking* e per avviarla scegliamo — usando il Lemma 2.3.13 —  $\bar{u}_\nu$  t.c.  $\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(0)) \rightarrow \mathcal{E}_{f,T}(u(0))$ . Grazie alla semicontinuità del funzionale (Proposizione 2.3.12) ora basterà mostrare la tesi per le approssimanti  $u_\nu$ , costanti a tratti e ‘note’<sup>(14)</sup>: seguirà quindi, tornando alla notazione con  $t_1$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{f,T}(u(t_2)) - \mathcal{E}_{f,T}(u(t_1)) &\leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t_2)) - \lim_{\nu \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t_1)) \\ &\equiv \liminf_{\nu \rightarrow \infty} [\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t_2)) - \mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t_1))] \leq 0. \end{aligned}$$

Dalla definizione  $\mathcal{E}_{f,T} \equiv \text{TV} - \bar{c}\mathcal{D}$  abbiamo che quando lo valutiamo su  $u_\nu(t)$ , costante a tratti, risulta una funzione additiva dei salti: nei tempi in cui le linee di discontinuità di  $u_\nu(t, x)$  non si intersecano  $\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t))$  rimarrà costante, rimanendolo i salti. Consideriamo ora un istante  $\bar{t}$  di interazione.

<sup>14</sup>Si riveda la Sezione 1.4.2 sull'approssimazione del *wave-front tracking*.

Se si intersecano in un solo punto tutte le linee di discontinuità di  $u_\nu$  abbiamo un accorpamento di tutti i salti:  $\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t))$  allora non cresce passando da  $t < \bar{t}$  a  $\bar{t}$  (Lemma 2.3.10).  $\mathcal{E}_{f,T}(u_\nu(t))$  non aumenta nemmeno dopo: dalla costruzione di  $u_\nu$  sappiamo che in  $\bar{t}$  possono nascere solo salti monotoni e t.c. l'involuppo — concavo se crescenti, convesso se decrescenti — di  $f_\nu$  nei corrispondenti sottointervalli coincide con il giusto involuppo di  $f$  nell'unione di tali sottointervalli, quindi  $\mathcal{E}_{f,T}$  rimane invariato.

Nel caso generale, a meno di ripetere il discorso, possiamo supporre  $\bar{t}$  primo istante di interazione (ricordiamo che  $u_\nu$  ha un numero finito di interazioni).  $\mathcal{E}_{f,T}$  è una funzione additiva dei salti di  $u_\nu(t)$ , segue quindi che fino alla successiva interazione i salti non interagenti a tempo  $\bar{t}$  rimanendo costanti non contribuiscono alla variazione di  $\mathcal{E}_{f,T}$ : possiamo pensare di non averli e ritrovarci nella situazione precedente.  $\square$

**Corollario 2.3.15** *Sia  $u$  soluzione entropica del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(t=0) = \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}), \\ f \in C^2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip}_L(\mathbb{R}). \end{cases}$$

*Poniamo  $T := \text{TV}(\bar{u})$ . Abbiamo allora che le funzioni del tempo  $\mathcal{E}_{f,T}(u(t))$ ,  $\text{TV}(u(t))$  e  $\mathcal{D}(u(t))$  sono continue da destra.*

DIM.  $\text{TV}(u(t))$  e, come appena mostrato nel Teorema 2.3.14,  $\mathcal{E}_{f,T}(u(t))$  sono decrescenti. Inoltre per  $t_k \rightarrow t^+$  si ha  $u(t_k) \xrightarrow{L^1_{\text{loc}}} u(t)$ , unendo decrescita e semicontinuità otteniamo

$$\begin{aligned} \text{TV}(u(t_k)) &\leq \text{TV}(u(t)) \leq \liminf_k \text{TV}(u(t_k)) \\ \mathcal{E}_{f,T}(u(t_k)) &\leq \mathcal{E}_{f,T}(u(t)) \leq \liminf_k \mathcal{E}_{f,T}(u(t_k)), \end{aligned}$$

da cui la continuità da destra di  $\mathcal{E}_{f,T}$ ,  $\text{TV}$ . Segue quella di  $\mathcal{D} \equiv \frac{1}{\varepsilon}(\text{TV} - \mathcal{E}_{f,T})$ . Si osserva che  $\forall \gamma_i$  curva di discontinuità anche  $\mathcal{A}(u^-(t), u^+(t))$  è continua da destra.  $\square$



**Corollario 2.3.16** *Sia  $u$  soluzione entropica del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 & \text{in } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \\ u(t=0) = \bar{u} \end{cases} \quad \begin{array}{l} \bar{u} \in \text{BV}(\mathbb{R}), \\ f \in C^2(\mathbb{R}) \cap \text{Lip}_L(\mathbb{R}). \end{array}$$

*Poniamo  $T := \text{TV}(\bar{u})$ . Abbiamo allora che le funzioni del tempo  $\text{TV}(u(t))$ ,  $\mathcal{D}(u(t))$ ,  $\mathcal{E}_{f,T}(u(t))$  sono a variazione limitata.*

DIM.  $\text{TV}(u(t))$  e, grazie alla Proposizione 2.3.14,  $\mathcal{E}_{f,T}(u(t))$  sono monotoni, quindi a variazione limitata. Di conseguenza lo è anche  $\mathcal{D}$ , loro differenza.  $\square$



## Capitolo 3

# La condizione di massima dissipazione

Come visto nella Sezione 1.4, il problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(0, x) = \bar{u}(x) \end{cases} \quad f \in C^2(\mathbb{R}), \quad u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$$

non ammette in generale soluzioni globali regolari. Considerando soluzioni distribuzionali tuttavia viene meno l'unicità di soluzione, che si recupera imponendo condizioni aggiuntive che restringano la classe di soluzioni. Abbiamo visto che una condizione naturale è la condizione di entropia: una soluzione debole  $u$  in  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$  è entropica se

$$\eta(u)_t + q(u)_x \leq 0$$

in senso distribuzionale per ogni coppia entropia-flusso di entropia, cioè per ogni funzione convessa  $\eta$  e per ogni  $q$  tale che sia  $q' = \eta' f'$ . Per soluzioni a variazione limitata questa si riduce ad essere una condizione locale da verificare nei punti di salto approssimato: precisamente deve essere

$$\lambda(\eta(u^+) - \eta(u^-)) - [q(u^+) - q(u^-)] \leq 0.$$

I sistemi fisici tuttavia presentano al più una entropia: è quindi interessante chiedersi se è sufficiente testare la condizione su una sola entropia piuttosto

che non su una famiglia infinita. Se il flusso è strettamente convesso la risposta è affermativa ([7], [21]). In generale tuttavia non è sufficiente richiedere la decrescita di una singola entropia per averne l'unicità. Ad esempio con il flusso  $f(u) = u^3 - u$  e l'entropia  $\frac{u^2}{2}$  abbiamo che la soluzione  $\chi_{\{x \geq 0\}} - \chi_{\{x < 0\}}$  soddisfa  $\eta(u)_t + q(u)_x = 0$ , pur non essendo entropica.

Nel presente capitolo si vuole dare una caratterizzazione più debole della soluzione entropica, nel caso in cui questa abbia struttura BV e soddisfi un'altra debole ipotesi di regolarità. Più precisamente si mostra che è sufficiente imporre la *condizione della corda* su ogni punto di salto approssimato: quando si ha un salto approssimato con limiti approssimati sinistro e destro rispettivamente  $u^- < u^+$   $f$  deve rimanere sopra la corda che la taglia in  $u^-, u^+$ ; viceversa quando si ha  $u^- > u^+$  si richiede che  $f$  sia sotto la corda che la taglia in  $u^+, u^-$ .

Questa condizione fu inizialmente proposta da Oleinik: mostrò che, sotto l'ipotesi di stretta convessità del flusso, discende dalla condizione

$$\|(u_x)_+(t, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{ct} \quad \text{per ogni } t > 0, c = \inf f'',$$

condizione, quest'ultima, sufficiente a garantire esistenza e unicità ([12]). Come suggerito in [6], Teorema 9.7.2, nel caso di un problema di Riemann, questa condizione si presta tuttavia a un'interessante reinterpretazione: essa sembra equivalente a imporre che sia massimizzata la dissipazione istantanea di una sola entropia strettamente convessa. Dimostrare, senza l'ipotesi di convessità, che è sufficiente imporre la condizione della corda significherebbe quindi dimostrare che, anche senza l'ipotesi di convessità, è sufficiente una sola entropia strettamente convessa per selezionare la soluzione entropica. Basterebbe imporre non solo che localmente dissipi, ma che localmente dissipi quanto più le è consentito.

Il capitolo è organizzato come segue:

Nella Sezione 3.1 si mostra la corrispondenza tra le soluzioni deboli dell'equazione di Hamilton-Jacobi e di una legge di conservazione scalare. Si mostra inoltre che la primitiva di una soluzione entropica della legge di conservazione è di viscosità per Hamilton-Jacobi. Da questo si ottiene che il flusso entropico

delle soluzioni di un problema di Cauchy è contrattivo in una norma più debole di quella  $L^1$ , che è quella considerata nella maggior parte dei casi.

Nella Sezione 3.2, basandoci sui risultati della Sezione 2.2, si illustra, sotto particolari ipotesi, come la condizione della corda si possa interpretare come una massimizzazione, per quasi ogni tempo, della dissipazione istantanea di entropia.

Nella sezione 3.3 si dimostra che la condizione della corda è sufficiente a caratterizzare la soluzione entropica, con una debole condizione di regolarità e assumendo che la soluzione abbia struttura BV. Il passaggio chiave della dimostrazione è osservare la lipschitzianità di due semigrupperi nella norma debole introdotta nella Sezione 3.1 e sfruttare quindi, per confrontarli, un lemma sui semigrupperi lipschitziani.

### 3.1 Hamilton-Jacobi, legge di conservazione

Abbiamo già visto come l'equazione di Hamilton-Jacobi

$$U_t + f(U_x) = 0.$$

e di una legge di conservazione

$$u_t + f(u)_x = 0.$$

siano legate: formalmente, l'una si ottiene dall'altra rispettivamente con un'integrazione o una derivazione nella variabile spaziale. In questa sezione mostriamo più nel dettaglio come le rispettive soluzioni deboli, con una opportuna regolarità, si corrispondano e, fatto ancora più interessante, come si corrispondano soluzioni di viscosità ed entropiche. Da questa corrispondenza otterremo la lipschitzianità del flusso entropico in una nuova norma, più debole di quella  $L^1$ . Presentiamo prima un lemma accessorio.

**Lemma 3.1.1** *Sia  $u$  soluzione debole di una legge di conservazione tale che  $u(t) \in L^1 \cap BV_1(\mathbb{R})$  per ogni  $t > 0$ . Allora  $u$  è  $BV((0, t) \times \mathbb{R})$  per ogni  $t > 0$ .*

DIM. Data  $\phi \in C_c^1((0, T) \times \mathbb{R})$ , per l'equazione differenziale è

$$\begin{aligned} \left| \iint_{(0, T) \times \mathbb{R}} u(\phi_t + \phi_x) \right| &= \left| \iint [-f(u)\phi_x + u\phi_x] \right| = \left| \iint [u - f(u)]\phi_x \right| \\ &\leq (1 + \|f'\|_{C^0}) \int_0^T \text{TV}(u(t, \cdot)) \|\phi(t, \cdot)\|_{C^0(\mathbb{R})} dt \\ &\leq (1 + \|f'\|_{C^0}) T \|\phi(t)\|_{C^0((0, T) \times \mathbb{R})}, \end{aligned}$$

quindi la tesi.  $\square$

**Lemma 3.1.2** *Sia  $u$  tale che  $\forall t \in \mathbb{R}^+$  si abbia  $u \in L^1 \cap \text{BV}_1(\mathbb{R})$ . Sia  $U(t, x) := \int_{-\infty}^x u(t, \cdot)$ . Allora*

*$U$  è lipschitziana su  $(0, T) \times \mathbb{R}$  e risolve q.o. l'equazione di Hamilton-Jacobi*

$$s s e$$

*$u$  è  $\text{BV}((0, T) \times \mathbb{R})$  e risolve in senso distribuzionale la legge di conservazione.*

DIM.  $\Rightarrow$ )

Sia  $\psi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ . Definiamo  $\phi := \psi_x$ . È  $\left\{ \begin{array}{l} \phi = \psi_x \\ \phi_t = (\psi_x)_t = \psi_{tx} \end{array} \right.$ . Essendo ancora  $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ , dalla definizione di soluzione di Hamilton-Jacobi segue

$$\begin{aligned} 0 &= \iint [U_t + f(U_x)]\phi = \iint [-U\phi_t + f(U_x)\phi] = \iint [-U\psi_{tx} + f(U_x)\psi_x] \\ &= \iint [U_x\psi_t + f(U_x)\psi_x] = \iint [u\psi_t + f(u)\psi_x], \end{aligned}$$

cioè  $u_t + f(u)_x = 0$  in  $\mathcal{D}'((0, T) \times \mathbb{R})$ . Per il Lemma 3.1.1 abbiamo inoltre che  $u \in \text{BV}((0, T) \times \mathbb{R})$  per ogni  $T > 0$ .  $\square$

$\Leftarrow$ )

Sia  $\phi \in C_c^\infty((0, T) \times \mathbb{R})$ . Per soluzioni in  $L^1$  la formulazione rimane valida per funzioni test anche solo limitate. Applicando la legge di conservazione abbiamo allora

$$\begin{aligned} U_t(\phi) &= - \iint_{\mathbb{R}^2} U\phi_t = \iint_{\mathbb{R}^2} u \left( \int^x \phi_t \right) \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} u \left( \int_t^x \phi \right) = - \iint_{\mathbb{R}^2} f(u)\phi = -f(U_x)(\phi), \end{aligned}$$

applicando nel penultimo passaggio la legge di conservazione. Abbiamo quindi  $U_t + f(U_x) = 0$ . Si ha allora la lipschitzianità:  $U_x = u$  è limitata, come anche  $U_t = f(u)$ .  $\square$

**Lemma 3.1.3** *Se  $u = u^- \chi_{\{x < \lambda t\}} + u^+ \chi_{\{x \geq \lambda t\}}$ ,  $\lambda = \frac{f(u^+) - f(u^-)}{u^+ - u^-}$  soddisfa la condizione della corda, allora ‘una sua  $x$ -primitiva’  $U$  è una soluzione di viscosità di Hamilton-Jacobi.*

DIM. A meno di rinormalizzazioni possiamo supporre  $u^- = 0$ ,  $u^+ = 1$ . Con la solita convenzione è  $f(0) = 0$ , quindi  $\lambda = f(1)$ . Abbiamo allora  $u = \chi_{\{x \geq \lambda t\}}$ ,  $U = \int_{-\infty}^x u(t, y) dy = (x - f(1)t) \chi_{\{x \geq \lambda t\}}$ . La condizione della corda si riduce a

$$\forall r \in (0, 1) \quad \text{vale che} \quad \frac{f(r)}{r} \geq f(1). \quad (3.1.1)$$

Consideriamo ora una funzione  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  tale che  $U - \phi$  abbia un minimo nell’origine e mostriamo che vale

$$\phi_t(0, 0) + \phi_x(0, 0) \geq 0. \quad (3.1.2)$$

Questo è sufficiente a mostrare che  $U$  è di viscosità: nei punti  $\{x = \lambda t\}$  la dimostrazione è la stessa mentre nella rimanente regione  $U$  è una soluzione classica, quindi anche di viscosità.

Consideriamo le derivate di  $\phi$  nelle direzioni rispettivamente tangente,  $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(1) \\ 1 \end{pmatrix}$ , e normale,  $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -f(1) \end{pmatrix}$ , alla linea di salto e nelle direzioni degli assi coordinati. La derivata nella direzione tangente alla linea di salto dovrà essere nulla: restringendo le funzioni a  $\{x = \lambda t\}$  abbiamo che  $U$  è costantemente nulla, quindi  $U - \phi = -\phi$  ha un minimo nell’origine, da cui si ottiene come affermato la derivata nulla. Nella direzione dell’asse  $x$  la derivata di  $\phi$  non è determinata, tuttavia ci sono dei vincoli: restringendo le funzioni all’asse  $x$  abbiamo che  $U = x \chi_{\{x \geq 0\}}$ , quindi dal fatto che  $U - \phi$  ha un minimo si deduce

$$0 \leq \phi_x(0, 0) \leq 1.$$

Poniamo  $r := \phi_x(0,0)$ . La derivata lungo la direzione normale per linearità è allora pari a  $r\sqrt{1+f(1)^2}$ , nella direzione dell'asse  $x$  quindi  $\phi_t(0,0) = \frac{-f(1)}{\sqrt{1+f(1)^2}}(r\sqrt{1+f(1)^2}) = -rf(1)$ . Abbiamo allora ottenuto

$$\phi_t(0,0) + f(\phi_x(0,0)) = f(r) - rf(1).$$

La disuguaglianza di viscosità (3.1.2) segue quindi subito dalla condizione della corda (3.1.1).  $\square$

**Lemma 3.1.4** *Se  $u$  è una soluzione entropica di una legge di conservazione con  $u(t=0) \in L^1 \cap L^\infty$ , allora  $\int_{-\infty}^x u$  è una soluzione di viscosità della rispettiva equazione di Hamilton-Jacobi.*

**Dim.** Per mostrare la tesi usiamo l'approssimazione del *wave-front tracking*. L'insieme dei punti in cui le approssimanti non hanno un intorno in cui sono costanti è composto dalle rette lungo cui si hanno salti che soddisfano la condizione della corda e da un numero finito di punti in cui queste si intersecano. Il Lemma 3.1.3 implica che la condizione di viscosità è soddisfatta nei punti di salto. Il Lemma 1.5.4 ci garantisce allora che la condizione è soddisfatta anche nei punti in cui queste si raccordano. Grazie alla Proposizione 1.5.8 si può ottenere la tesi.  $\square$

È utile introdurre ora una nuova norma:  $\|u(t, \cdot)\| := \sup_x |\int_{-\infty}^x u(t, y) dy|$  (Lemma 3.1.5). Rispetto a questa sarà rilevante osservare la lipschitzianità del flusso  $t \mapsto u(t)$ , dove  $u$  è una soluzione debole di una legge di conservazione scalare con  $u(t) \in BV_1 \cap L^1$  (Lemma 3.1.8). Per il semigrupp delle soluzioni entropiche di un problema di Cauchy inoltre varrà anche la lipschitzianità rispetto al dato iniziale (Corollario 3.1.10), conseguenza del principio del massimo per le corrispondenti soluzioni di viscosità.

**Lemma 3.1.5** *Valgono i seguenti punti:*

- 1) *Definiamo  $\|u(\cdot)\| := \sup_x |\int_c^x u(s) ds|$ . Essa, comunque scelto  $c \in \overline{\mathbb{R}}$ , è una norma su  $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ .*



- 2) *Comunque scelto  $K > 0$  e preso  $c \in [-K, K]$ , la norma sopra definita induce sulla palla unitaria di  $L^\infty((-K, K))$  una topologia equivalente alla topologia debole\* di  $L^\infty$ .*
- 3) *La topologia indotta su  $L_1^\infty((-K, K)) \cap BV_1((-K, K))$  è equivalente a quella ivi indotta dalla norma  $L^1((-K, K))$ .*

DIM. Vediamo prima che è una norma. Sono immediate omogeneità, disuguaglianza triangolare e il fatto che sia finita. Per vedere che  $\|u\| = 0$  implica  $u = 0$  quasi ovunque si può osservare che da  $\int_c^x u = 0 \forall x$  segue  $\int_a^b u = \int_c^b u - \int_c^a u = 0$  per ogni  $a, b$ . Se  $u \in L^1(\mathbb{R})$  nulla vieta di scegliere  $c = \pm\infty$ .

Sia ora  $c \in \mathbb{R}$ , restringiamo il dominio a un compatto e il codominio a  $[-1, 1]$ . Per dimostrare il secondo punto è sufficiente mostrare che si hanno le stesse successioni convergenti a zero ([16], pag. 20).

Sia  $u_k \rightarrow 0$  in  $w^*$ - $L^\infty$  con  $u_k : |u_k| \leq 1$ . Testando con funzioni caratteristica abbiamo che  $\forall x$  vale  $|\int_c^x u_k| \rightarrow 0$  per  $k \rightarrow \infty$ :  $\varphi_k(x) := \int_c^x u_k$  converge puntualmente a 0. Dalla equilimitatezza (limite  $2K$  essendo  $|u_k| \leq 1$ ) e uniforme equicontinuità (sono equilipschitziane di costante 1) si ha la convergenza uniforme delle  $\phi_k$ , a 0.

Sia ora  $|\sup_x \int_c^x u_k| \rightarrow 0$ , sempre con  $|u_k| \leq 1$ . Per la densità in  $L^1((-K, K))$  delle funzioni semplici è sufficiente osservare che  $\forall a, b \in \mathbb{R}$  è

$$\left| \int_a^b u_k \right| = \left| \int_c^b u_k - \int_c^a u_k \right| \leq 2 \sup_x \left| \int_c^x u_k \right| \rightarrow 0,$$

quindi che per ogni funzione semplice  $\varphi$  abbiamo  $|\int_{-K}^K \varphi u_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ .

Per dimostrare il terzo punto mostriamo infine che, se ci restringiamo ulteriormente alla palla unitaria di BV, allora la topologia indotta è quella indotta dalla norma  $L^1$ . Chiaramente se  $u_k \rightarrow u$  in  $L^1$  allora anche  $\|u_k - u\| \rightarrow 0$ . Supponiamo ora che sia  $u_k \xrightarrow{w^*} u$ . Per le limitazioni  $TV(u_k) \leq 1$ ,  $\|u\|_\infty \leq 1$  possiamo applicare il teorema di Helly e ottenere che  $\exists u \in BV_1((-K, K))$  tale che a meno di sottosuccessioni si abbia  $u_k \rightarrow u$  puntualmente, quindi grazie alla limitatezza anche in  $L^1$ :  $u$  per l'unicità del limite debole dovrà essere la

funzione  $u$ . Potendo estrarre così da ogni sottosuccessione di  $u_k$  una sottosuccessione convergente fortemente a  $u$  si ha la tesi.  $\square$

**Osservazione 3.1.6** *La norma appena introdotta non è equivalente alla norma  $L^1$ , nemmeno su  $BV((-K, K))$ , benché inducano la stessa topologia. Chiaramente vale la disuguaglianza  $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{L^1}$ , tuttavia  $\forall n \in \mathbb{N}$  esiste  $u_n \in BV_1$  limitata da 1 t.c.  $\|u_n\|_{L^1} = n\|u_n\|$ : si prenda ad esempio in  $[-1, 1)$  la successione*

$$u_n := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{2n} \chi_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})}.$$

Si ha infatti che

- $TV(u_n) = \frac{1}{n}(n-1) \leq 1$ ;
- $\|u_n\|_{L^1} = \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n^2} = n\|u_n\|$ .

Segue che comunque scelta  $C > 0$  non può essere  $\|\cdot\|_{L^1} \leq C\|\cdot\|$ .  $\square$

**Osservazione 3.1.7** *Considerando la successione  $\phi_k := k\chi_{(0, \frac{1}{k^2}]}$  abbiamo che  $\|\phi_k\| \rightarrow 0$  ma che  $\phi_k$  non ha limite nella topologia debole\* di  $L^\infty$ , non essendo limitata in  $\|\cdot\|_\infty$ . Se non ci restringiamo a un limitato effettivamente la topologia indotta da  $\|\cdot\|$  non è quella debole\*, che non è metrizzabile ([5], Cap. 3, Osservazione 19).*

**Lemma 3.1.8** *Se  $u$  è una soluzione debole di una legge di conservazione scalare con  $u(t) \in BV_1 \cap L^1$  per ogni  $t > 0$ , è lipschitziano il flusso*

$$\mathbb{R}^+ \ni t \mapsto u(t) \in (BV_1 \cap L^1, \|\cdot\|).$$

DIM. Essendo a variazione limitata,  $u(t, \cdot)$  ammette limite a  $-\infty$ , nullo considerata l'integrabilità. Scelti  $x, z \in \mathbb{R}$ ,  $t, h \in \mathbb{R}^+$  per convergenza dominata

è allora  $\int_t^{t+h} f(u(r, z)) dr \rightarrow 0$  per  $z \rightarrow -\infty$ . Usando la legge di conservazione quindi si ha per quasi ogni  $x$

$$\left| \int_{-\infty}^x u(t+h, s) - u(t, s) ds \right| = \left| \int_t^{t+h} f(u(r, x)) dr \right| \leq \|f(u)\|_{\infty} h,$$

da cui  $\|u(t+h, \cdot) - u(t, \cdot)\| = \sup_x \left| \int_{-\infty}^x u(t+h, s) - u(t, s) ds \right| \leq \|f(u)\|_{\infty} h$ .  $\square$

**Corollario 3.1.9** *Nelle ipotesi dei Lemmi 3.1.2 e 3.1.4, le corrispondenze si estendono ai problemi di Cauchy*

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0 \\ u(t=0) = \bar{u} \end{cases} \quad \begin{cases} U_t + f(U_x) = 0 \\ U(t=0) = \int_{-\infty}^x \bar{u} \end{cases}.$$

DIM. Dall'uguaglianza

$$\left\| U(t, x) - \int_{-\infty}^x \bar{u} \right\|_{C^0} \equiv \sup_x \left| \int_{-\infty}^x u(t, s) - \bar{u}(s) ds \right|$$

usando il Lemma 3.1.5 segue che se una soddisfa il dato iniziale questo vale anche per l'altra, aggiungendo la seguente osservazione. Dal fatto che  $u(t) \in BV(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$  abbiamo che  $u(t, x) \rightarrow 0$  puntualmente per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Per convergenza dominata quindi  $\int_0^t f(u)(s, x) ds \rightarrow 0$  per  $x \rightarrow \pm\infty$ . Applicando la legge di conservazione abbiamo allora che, fissato  $t > 0$ , per quasi ogni  $x$  vale

$$\left| \int_{-\infty}^x u(t, y) dy \right| \leq \left| \int_{-\infty}^x u(0, y) dy \right| + \left| \int_0^t u(s, x) ds \right| \leq t + \left| \int_{-\infty}^x \bar{u}(y) dy \right|.$$

Si ha una disuguaglianza analoga per l'integrale fino a  $+\infty$ . Grazie all'integrabilità di  $\bar{u}$ , comunque scelto  $\varepsilon > 0$  per  $t < \frac{\varepsilon}{2}$  e per un  $K$  sufficientemente grande valgono allora  $\int_{-\infty}^{-K} u(t, \cdot) < \varepsilon$  e  $\int_K^{+\infty} u(t, \cdot) < \varepsilon$ .  $\square$

**Corollario 3.1.10** *Sia  $u(t; \bar{u})$  soluzione entropica al tempo  $t$  di un problema di Cauchy con dato  $\bar{u}$ . Abbiamo allora che la mappa*

$$\mathbb{R}^+ \times \left( L^1(\mathbb{R}) \cap BV_1(\mathbb{R}) \right) \ni (t, \bar{u}) \mapsto u(t; \bar{u}) \in \left( L^1(\mathbb{R}) \cap BV_1(\mathbb{R}) \right)$$

*è lipschitziana, dove si normi  $L^1(\mathbb{R}) \cap BV_1(\mathbb{R})$  con  $\|u\| = \sup_x \left| \int_{-\infty}^x u \right|$ .*

DIM. Grazie al Corollario 1.5.7, per la corrispondenza delle norme, abbiamo che il flusso entropico è 1-lipschitziana rispetto al dato iniziale, dove si normi  $L^1 \cap BV_1$  con la ‘norma debole’. Nel Lemma 3.1.8 inoltre si è osservato che è 1-lipschitziana anche rispetto al tempo.  $\square$

## 3.2 Sulla condizione della corda

Nella Sezione 2.2 abbiamo introdotto il funzionale dissipazione istantanea  $\mathcal{D}$ . Sottolineiamo ora come, nel caso sia soddisfatta un’altra ipotesi di regolarità, imporre la condizione della corda equivalga a massimizzare istantaneamente la dissipazione di entropia, rispetto a una sola entropia strettamente convessa; per noi sarà ancora  $\eta(u) = \frac{u^2}{2}$ . Per il futuro ci si propone di migliorare questa equivalenza, rimuovendo l’ipotesi che ora assumiamo.

Sia  $u$  una soluzione debole di una legge di conservazione scalare con  $u(t) \in BV(\mathbb{R})$  per ogni  $t > 0$ :

$$u_t + f(u)_x = 0 \quad \text{con } f \in C^2(\mathbb{R}).$$

Sappiamo allora, per il Lemma 3.1.1, che  $u \in BV((0, t) \times \mathbb{R})$  per ogni tempo  $t$ . Si è inoltre detto che, grazie all’equazione differenziale, per quasi ogni istante abbiamo solo punti di continuità approssimata o punti di salto approssimato giacenti su curve  $C^1$  che si estendono un po’ prima e un po’ dopo quell’istante. *Consideriamo per mostrare l’equivalenza le soluzioni deboli i cui limiti approssimati sinistro e destro siano continui lungo le curve di salto approssimate.* Per questi tempi abbiamo allora calcolato la dissipazione istantanea di entropia, coincidente con la derivata temporale della funzione che al tempo  $t$  associa la dissipazione di entropia della striscia  $(0, t) \times \mathbb{R}$ , trovando l’espressione:

$$\mathcal{D}(u(t)) = \lim_{t_k \downarrow t} \sum_i \hat{\mathcal{A}}(u_i^-(t_k), u_i^+(t_k)) = \sum_i \hat{\mathcal{A}}(u_i^-, u_i^+), \quad (3.2.1)$$

dove  $u_i^-(t_k), u_i^+(t_k)$  sono i salti di  $u(t_k)$  e  $\hat{\mathcal{A}}(u_i^-, u_i^+)$  è l’area — con segno — compresa da  $u_j^-$  a  $u_j^+$  tra  $f$  e la sua corda,  $t_k$  è una opportuna successione di

tempi. Per i punti terminali delle curve di salto approssimato vale invece solo la prima uguaglianza di (3.2.1).

Da questo, con le assunzioni fatte, segue che imporre la condizione della corda equivale a imporre che per quegli istanti l'evoluzione della soluzione sia tale da massimizzare la dissipazione istantanea  $\mathcal{D}$ . Considerando altre eventuali soluzioni deboli  $v$ , con uguale regolarità, che coincidano con  $u$  all'istante  $t$ , mostriamo che è  $\mathcal{D}(v) \leq \mathcal{D}(u)$ . Fissiamo infatti l'attenzione su un salto  $u^-, u^+$ , per semplicità supponiamo sia l'unico. Per calcolare la dissipazione di entropia abbiamo visto che si considerano solo le curve di salto approssimato, supporto di tale misura. Se tra  $t$  e  $t + \varepsilon$  la soluzione  $v$  ha dei salti  $v_i(t)$ , da  $-\infty$  a  $+\infty$ , allora la sua dissipazione istantanea al tempo  $t$  sarà pari a

$$\sum_i \hat{\mathcal{A}}(v_i^-(t^+), v_i^+(t^+)),$$

dove il primo dei valori  $u_k^-$  dovrà essere  $u^-$ , l'ultimo dei valori  $u_k^+$  invece dovrà essere  $u^+$ . Abbiamo inoltre visto, sempre nella Sezione 2.2, che, poiché  $u$  soddisfa la condizione della corda, vale

$$\mathcal{D}(u(t)) = \mathcal{A}(u^-, u^+).$$

Esattamente come nel caso di un problema di Riemann, precedentemente considerato, possiamo concludere allora che  $\mathcal{D}(v) \leq \mathcal{D}(u)$ . Viceversa, se  $u$  non soddisfacesse la condizione della corda, potremmo ripetere il ragionamento sopra con  $u$  invece di  $v$  e la soluzione entropica  $z$  al problema di Cauchy invece di  $u$ : vedremmo allora che  $\mathcal{D}(u) < \mathcal{D}(z)$ . I due versi dell'equivalenza risultano allora mostrati.

### 3.3 Caratterizzazione della soluzione entropica

Scopo di questa sezione è mostrare che se una soluzione debole soddisfa la condizione della corda coincide con la soluzione entropica, assumendo inoltre una lieve ipotesi di regolarità. Per quanto visto nella Sezione 3.2 otteniamo

allora che *la soluzione entropica si può caratterizzare come la soluzione debole che per quasi ogni tempo massimizza la dissipazione istantanea*, quando soddisfa le dette ipotesi di regolarità. Si sottolinea inoltre, per questa Sezione, che ipotesi di regolarità aggiuntive vengono sempre assunte, quando non si studi il caso speciale di una singola equazione scalare con flusso convesso. La soluzione entropica viene così caratterizzata da una condizione che coinvolge una sola entropia, attraverso una condizione di massimo. La condizione di regolarità che richiederemo è la seguente:

- Sia  $\hat{\lambda} := \|f'\|_\infty$ . Scelti dei parametri  $a < b$ ,  $t$ ,  $\epsilon$  definiamo il trapezio

$$T := \{(y, s) : t \leq s \leq t + \epsilon, a + \hat{\lambda}(s - t) \leq y \leq b - \hat{\lambda}(s - t)\}.$$

Una funzione  $v \in L^\infty$  soddisfa l'ipotesi di regolarità se esiste una costante  $C > 0$  tale che per ogni  $a < b$ ,  $t > 0$  esista  $\epsilon > 0$  tale che

$$\sup_{(x,t) \in T} v(t, x) - \inf_{(x,t) \in T} v(t, x) \leq C \left( \sup_{x \in [a,b]} v(0, x) - \inf_{x \in [a,b]} v(0, x) \right). \quad (3.3.1)$$

**Osservazione 3.3.1** *Una soluzione regolare chiaramente soddisfa questa condizione: abbiamo scelto  $\hat{\lambda}$  superiore a tutte le velocità caratteristiche. Muovendoci a ritroso lungo le caratteristiche, vediamo allora che i valori assunti sulla base minore del trapezio sono un sottoinsieme di quelli assunti sulla base maggiore. Almeno per dati  $L^1_{\text{loc}} \cap L^\infty$ , anche una soluzione entropica soddisfa questa condizione: possiamo mostrarlo sfruttando l'approssimazione del wave-front tracking. Per le approssimanti la tesi si vede subito esser vera; per la convergenza  $L^1_{\text{loc}}$  alla soluzione entropica, possiamo poi estrarre una sottosuccessione che vi converga puntualmente quasi ovunque, quindi ottenere la tesi.*

Si dimostrerà il seguente teorema:

**Teorema 3.3.2** *Sia  $v : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  soluzione debole di una legge di conservazione scalare tale che per ogni  $t > 0$  si abbia  $v(t, \cdot)$  in  $BV_1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Se in ogni punto di salto approssimato  $v$  soddisfa la condizione della corda e se soddisfa inoltre la condizione (3.3.1), allora  $v$  è una soluzione entropica.*

Prima della dimostrazione (pag. 92) presentiamo dei risultati accessori. Abbiamo ottenuto che il flusso entropico, oltre ad essere lipschitziano in  $L^1$  — come risaputo — è anche lipschitziano nella norma più debole  $\|\cdot\|$  (Corollario 3.1.10). Abbiamo inoltre che un generico flusso debole è lipschitziano rispetto al tempo nella ‘norma debole’ (Lemma 3.1.8). Data una soluzione debole possiamo allora confrontarla con la soluzione entropica applicando il Lemma del Semigruppato ([3], Teorema 2.9), di cui si riporta l’enunciato:

**Lemma 3.3.3 (Bressan)** *Sia  $D$  un sottoinsieme chiuso di uno spazio di Banach  $X$  e sia  $S : D \times [0, +\infty) \rightarrow D$  t.c.*

- $S_0 u = u$  e  $S_s S_t u = S_{s+t} u$  (condizione di semigruppato);
- $\|S_t u - S_s v\|_X \leq L \|u - v\|_X + L'|t - s|$  (lipschitzianità).

Comunque si prenda una mappa lipschitziana  $w : [0, T] \rightarrow D$  vale la stima

$$\|w(T) - S_T w(0)\|_X \leq L \int_0^T \left\{ \liminf_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|w(t+h) - S_h w(t)\|_X}{h} \right\} dt. \quad (3.3.2)$$

Per le osservazioni sopra, ai fini del Teorema 3.3.2 potremo applicare il Lemma del Semigruppato con

- $X \equiv D := L^1 \cap BV_1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$  normato da  $\|u\| := \sup_x |\int_0^x u|$ ; tale spazio è di Banach perché chiuso in  $L^1$ , osservando che la topologia indotta da questa norma è la stessa indotta da  $L^1$  (Lemma 3.1.5);
- $S_t(\bar{u}) := s_t(\bar{u}) = u(t; \bar{u})$  il semigruppato dato dal flusso entropico;
- $w(t) := v(t; u^0)$  un evoluto massimamente dissipativo al tempo  $t$  di  $u^0$ .

Presentiamo ora dei lemmi che serviranno per la dimostrazione del teorema.

**Lemma 3.3.4** *Sia  $w \in L^1(\mathbb{R}^2)$  approssimativamente nulla nell’origine, i.e.*

$$\frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-r}^r |w(t, x)| dt dx \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Allora  $\forall \varepsilon > 0$  si ha che

$$\frac{|\{x \in [-r, r] : \int_{-r}^r w(t, x) dt \leq \varepsilon\}|}{2r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 1.$$

In particolare  $\forall c > 0$  esiste  $\delta > 0$  tale che comunque si scelgano  $x, r$  con  $|x| \leq r < \delta$

$$\exists \tilde{x} \text{ con } |\tilde{x} - x| < cr \text{ t.c.} \quad \int_{-r}^r |w(s, \tilde{x})| ds \leq \varepsilon;$$

Lo stesso si ha nella variabile  $t$ , scambiandola con  $x$ .

DIM. Sia  $r > 0$ , mostriamo la prima. Consideriamo l'insieme delle  $x$  per cui la stima voluta non sussiste: sia  $X := \{x \text{ t.c. } \int_{-r}^r |w(s, x)| ds > \varepsilon r\}$ ; guardiamo quanto è grande. Valgono

$$\frac{1}{r^2} \int_{-r}^r \int_{-r}^r |w(t, x)| dt dx \geq \frac{1}{r^2} \int_{X \cap [-r, r]} \int_{-r}^r |w(t, x)| dt dx \geq \frac{2\varepsilon |X \cap [-r, r]|}{r}.$$

Per la continuità approssimata di  $w$  si ottiene che  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{|X \cap [-r, r]|}{r} = 0$ :  $\exists \delta$  t.c. per  $r < \delta$  si ha  $|X \cap [-r, r]| < cr$ . Questo significa esattamente che comunque preso  $x$  con  $|x| < r$  in un suo intorno di raggio  $cr$  ci sono punti  $\tilde{x}$  nel complementare di  $X$ , quindi per cui vale la stima voluta, da qui la tesi. Per simmetria si ha la tesi anche sull'altra variabile.  $\square$

**Lemma 3.3.5 (Valori esatti delle restrizioni)** *Sia  $v$  una soluzione debole BV di una legge di conservazione che soddisfi inoltre la condizione della corda in ogni punti di salto approssimato. Se il punto  $(t, x)$  è, nel piano, di continuità approssimata, allora la restrizione  $v(t, \cdot)$  è continua in  $x$  con valore pari al limite di continuità approssimata. Se il punto  $(t, x)$  è, nel piano, di salto approssimato, allora anche la restrizione  $v(t, \cdot)$  ha un salto in  $x$  ed ha limiti sinistro e destro pari ai limiti approssimati sinistro e destro di  $v$ , rispettivamente.*

DIM. Supponiamo l'origine punto di continuità approssimata di  $v$ , sia 0 il limite approssimato. Per la lipschitzianità di  $f$  abbiamo che anche  $f(u)$  è approssimativamente continua nell'origine, diciamo approssimativamente nulla per comodità. Usando la struttura BV di  $v$ , dalla legge di conservazione



deduciamo che per quasi ogni  $r$

$$\int_{-r}^r v(0, x) dx = \int_{-r}^{-r} v(r, x) dx + \frac{1}{2} \int_0^r [f(v(t, r)) - f(v(t, -r))] dt.$$

Per il Lemma 3.3.4 inoltre comunque preso  $n \in \mathbb{N}$  possiamo scegliere  $r_n < \frac{1}{n}$  per cui sia contemporaneamente

$$\left| \int_{-r_n}^{-r_n} v(r_n, x) dx \right| \leq \frac{1}{2n}, \quad \left| \int_0^{r_n} f(v(t, \pm r_n)) dt \right| \leq \frac{1}{4n}$$

e di conseguenza

$$\left| \int_{-r_n}^{-r_n} v(0, x) dx \right| < \frac{1}{n}.$$

Da  $\int_{-r_n}^{r_n} |v(0, \cdot)| \rightarrow 0$  otteniamo che i limiti sinistro e destro di  $v(0, \cdot)$  — che essendo  $\text{BV}(\mathbb{R})$  sappiamo esistere — sono entrambi nulli in 0.

Per i punti di salto approssimato conviene sottrarre a  $v$  una soluzione debole  $j$  così fatta: sia pari al limite approssimato sinistro  $v^-$  di  $v$  nella regione a sinistra della retta tangente nell'origine alla linea di salto approssimato per  $v$ , a quello destro  $v^+$  nella regione destra. La differenza  $v - j$  è approssimativamente nulla, per definizione di salto approssimato, così come lo è  $f(u) - f(j)$ : si può nuovamente trovare  $r_n$  per cui valgono le stime analoghe a sopra, ma per la differenza delle due funzioni. Si applica poi nuovamente la legge di conservazione sia su  $v$ , sia su  $j$  per la maggiorazione: per quasi ogni  $r$  abbiamo che

$$\begin{aligned} \int_{-r}^r |v(0, \cdot) - j(0, \cdot)| &\leq \int_0^r |f(v(\cdot, -r)) - f(j(\cdot, -r))| + |f(v(\cdot, r)) - f(j(\cdot, r))| \\ &\quad + \int_{-r}^r |v(r, \cdot) - j(r, \cdot)|. \end{aligned}$$

Da  $\left| \int_{-r_n}^{r_n} [v(0, x) - j(0, x)] dx \right| \rightarrow 0$  si ha che  $(v - j)(0, \cdot)$  è nell'origine continua e nulla: allora  $v(0, \cdot)$  ha in 0 limite sinistro pari a  $v^-$ , limite destro pari a  $v^+$ .<sup>(1)</sup>  $\square$

---

<sup>1</sup>Per una dimostrazione diversa, sempre fissando il punto nell'origine, si potrebbe direttamente usare la legge di conservazione separatamente in due dei quadranti delimitati da  $\{t = 0\}$ ,  $\{x = 0\}$ ; nel caso di salto approssimato si sceglierebbe quali tra i quattro in modo da non farvi giacere la tangente alla curva di salto; si mostrerebbe quindi grazie ai limiti approssimati che  $\frac{1}{r_n} \int_{-r_n}^0 |v(0, \cdot) - v^-| \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{r_n} \int_0^{r_n} |v(0, \cdot) - v^+| \rightarrow 0$  per opportune successioni  $r_n \rightarrow 0$ .

**Lemma 3.3.6 (Regolarità)** *Sia  $W \in \text{Lip}_L(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ . Se in  $(\bar{t}, \bar{x})$   $W_x, W_t$  sono approssimativamente continue, allora  $W$  è differenziabile in  $(\bar{t}, \bar{x})$ .*

DIM. Sia dato  $\varepsilon > 0$ . Senza perdita di generalità semplifichiamo la notazione assumendo  $(\bar{t}, \bar{x}) = (0, 0)$ ,  $W(0, 0) = W_t(0, 0) = W_x(0, 0) = 0$ : mostreremo la differenziabilità nell'origine con derivata nulla. Fissiamo  $(t, x)$  e poniamo  $r := \|(t, x)\|$ . Se  $r$  sufficientemente piccolo dalla continuità approssimata (Lemma 3.3.4) abbiamo che

$$\begin{aligned} \exists \tilde{x} \text{ con } |\tilde{x}| < \min \left\{ \frac{\varepsilon r}{4L}, r \right\} \text{ t.c.} & \quad \int_{-r}^r |W_t(s, \tilde{x})| ds \leq \frac{\varepsilon}{4}, \\ \exists \tilde{t} \text{ con } |t - \tilde{t}| < \frac{\varepsilon r}{4L} \text{ e } |\tilde{t}| \leq r \text{ t.c.} & \quad \int_{-r}^r |W_x(\tilde{t}, s)| ds \leq \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Da questo muovendoci lungo una spezzata lungo le linee coordinate per i punti  $(t, x), (\tilde{t}, x), (\tilde{t}, \tilde{x}), (0, \tilde{x}), (0, 0)$  per la lipschitzianità di  $W$  abbiamo

$$\begin{aligned} |W(t, x)| & \leq |W(t, x) - W(\tilde{t}, x)| + |W(\tilde{t}, x) - W(\tilde{t}, \tilde{x})| \\ & \quad + |W(\tilde{t}, \tilde{x}) - W(0, \tilde{x})| + |W(0, \tilde{x}) - W(0, 0)| \\ & \leq L|t - \tilde{t}| + \left| \int_{\tilde{x}}^x W_x(\tilde{t}, s) ds \right| + \left| \int_0^{\tilde{t}} W_t(s, \tilde{x}) ds \right| + L|\tilde{x}| \\ & \leq \varepsilon r \end{aligned}$$

i.e.

$$\exists \delta(\varepsilon) > 0 \text{ t.c. } \forall (x, y) : \|(x, y)\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \frac{|W(t, x)|}{\|(t, x)\|} \leq \varepsilon.$$

□

**Lemma 3.3.7** *Sia  $v$  una soluzione debole a variazione limitata di una legge di conservazione scalare. Supponiamo che in  $t = 0$  abbia solo punti di continuità approssimata o punti di salto approssimato in cui sia soddisfatta la regola della corda. Detta  $u$  la soluzione entropica al problema di Cauchy con dato  $v(0)$ ,  $u - v$  è approssimativamente nulla in  $(0, x) \forall x \in \mathbb{R}$ .*

DIM. Per mostrare la continuità approssimata di  $u - v$  ad esempio nell'origine confrontiamo  $u, v$  piuttosto che tra loro con un termine intermedio dato dalla soluzione entropica  $z$  del problema di Riemann con dato  $v(0, 0^-)\chi_{(-\infty, x)} + v(0, 0^+)\chi_{[x, \infty)}$ .

Per  $v - z$  distinguiamo due casi: se c'è già continuità approssimata per  $v$  quanto voluto è gratis, essendo  $z$  in tal caso costante. In caso contrario serve osservare che, per il Lemma 3.3.5 e per la condizione della corda, è esattamente  $z = v(0, 0^-)\chi_{(x < \lambda t)} + v(0, 0^+)\chi_{[x \geq \lambda t)}$  con  $\lambda = \frac{f(v^+) - f(v^-)}{v^+ - v^-}$ . Quindi i limiti approssimati sinistro e destro delle due funzioni coincidono e inoltre le rispettive linee di salto sono tangenti.

Lo stesso varrà per  $u$ , soluzione entropica.  $\square$

**Lemma 3.3.8** *Siano  $u, v$  come nel Lemma 3.3.7. Inoltre sia  $v \in L^1(\mathbb{R}) \cap BV_1(\mathbb{R})$ . Posto*

$$W(h, x) := \int_{-\infty}^x v(h) - s_h v(0)$$

*abbiamo che  $W$  è approssimativamente nulla e differenziabile con derivate nulle in ogni punto dell'asse  $x$ . Inoltre per ogni  $\lambda > 0$  la mappa*

$$h \mapsto \sup_{\{|h| \geq \lambda|x|\}} \frac{1}{h} \left| \int_{-\infty}^x v(h) - s_h v(0) \right|$$

*è continua nell'origine.*

DIM. Il Lemma 3.3.7 ci garantisce la continuità di  $W_x$ , essendo  $W_x = u - v$ . Poniamo  $U(h, x) := \int_{-\infty}^x u(h)$ ,  $V(h, x) := \int_{-\infty}^x s_h v(0)$ . Dal fatto che  $U, V$  sono lipschitziane e risolvono l'equazione di Hamilton-Jacobi (Lemma 3.1.2) segue che anche  $W_t$  è approssimativamente nulla nei punti dell'asse  $x$ :

$$\int_{B_r} |U_t - V_t| = \int_{B_r} |f(U_x) - f(V_x)| \leq L \int_{B_r} |U_x - V_x| \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0.$$

Per il Lemma 3.3.6 abbiamo quindi che  $W$  è nulla e differenziabile con derivate nulle in ogni punto dell'asse  $x$ .

Mostriamo ora la continuità della seconda mappa; a meno di traslazioni possiamo limitarci all'origine. Comunque scelto  $\lambda > 0$  nei settori  $\{(t, x) : |t| \geq \lambda|x|\}$  abbiamo, grazie alla differenziabilità,

$$\begin{aligned} \left| \frac{W(h, x)}{h} \right| &= \left| \frac{W(h, x) - W(0, 0) - W_x(0, 0)x - W_t(0, 0)h}{h} \right| \\ &= \frac{o(\sqrt{x^2 + h^2})}{h} \leq (\sqrt{1 + \lambda^2}) \frac{o(h)}{h} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quindi per  $h$  sufficientemente piccolo  $\frac{1}{h} \left| \int_{-\infty}^x v(h) - s_h v(0) \right| \leq \varepsilon$  per ogni  $x$  con  $\lambda|x| \leq |h|$ .  $\square$

**Lemma 3.3.9** *Sia  $v$  una soluzione debole a variazione limitata di una legge di conservazione scalare, integrabile in  $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Sia  $\xi \in (a, b)$  e siano*

$$f'(\xi) =: \lambda \leq \hat{\lambda} := \|f'\|_\infty, \quad T := \left\{ (x, t) : a + \hat{\lambda}t < x < b - \hat{\lambda}t, t < \frac{a+b}{2\hat{\lambda}} \right\}.$$

Vale allora la stima

$$\left| \int_{a+\hat{\lambda}h < x < b-\hat{\lambda}h} v(h, x) - v(0, x - \lambda h) dx \right| \leq 2\|f''\|_\infty \left( \sup_T v - \inf_T v \right)^2 h.$$

DIM. Supponiamo prima  $a, b$  finiti. Applichiamo la legge di conservazione al parallelogramma seguente, eventualmente se necessario scegliendo estremi arbitrariamente vicini,

$$\{(x, t) : a + \hat{\lambda}h - \lambda(h - t) < x < b - \hat{\lambda}h - \lambda(h - t)\}.$$

Abbiamo allora che vale

$$\begin{aligned} &\int_{a+\hat{\lambda}h < x < b-\hat{\lambda}h} v(h, x) - v(0, x - \lambda h) dx \\ &= \int_0^h [(f(u) - \lambda u)(t, a + \lambda t) - (f(u) - \lambda u)(t, b + \lambda t)] dt. \end{aligned}$$

Poniamo ora  $u'' = u(t, a + \lambda t)$  e  $u' = u(t, b + \lambda t)$ , otteniamo che il modulo dell'integrando è maggiorato da

$$\begin{aligned} & |(f(u'') - \lambda u'') - (f(u') - \lambda u')| \\ &= |f(u'') - f(u') - f'(\xi)(u'' - u')| \\ &= \left| \left\{ \int_0^1 [f'(su'' + (1-s)u') - f'(\xi)] ds \right\} (u'' - u') \right| \\ &\leq \|f''\|_\infty (|u'' - \xi| + |u' - \xi|) |u'' - u'| \\ &\leq 2\|f''\|_\infty \left( \sup_T v - \inf_T v \right)^2, \end{aligned}$$

dove si è usata la formula di quadratura dei rettangoli. Da questo segue quindi

$$\left| \int_{a+\hat{\lambda}h < x < b-\hat{\lambda}h} v(h, x) - v(0, x - \lambda h) dx \right| \leq 2\|f''\|_\infty \left( \sup_T v - \inf_T v \right)^2 h,$$

come cercato. Nel caso  $a, b$  fossero infiniti la tesi si avrebbe applicando il caso appena visto con una successione  $a_k \downarrow a, b_k \uparrow b$ , essendo  $v \in L^1(\mathbb{R})$ .  $\square$

**Corollario 3.3.10** *Siano  $v, u$  soluzioni deboli a variazione limitata di un problema di Cauchy per una legge di conservazione scalare, integrabili in  $(a, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$ . Siano  $\xi \in (a, b)$  e*

$$f'(\xi) =: \lambda \leq \hat{\lambda} := \|f'\|_\infty, \quad T := \left\{ (x, t) : a + \hat{\lambda}t < x < b - \hat{\lambda}t, t < \frac{a+b}{2\hat{\lambda}} \right\}.$$

Vale allora la stima per ogni  $h \leq \frac{a+b}{2\hat{\lambda}}$ , per ogni  $x \leq b - \hat{\lambda}h$

$$\left| \int_{a+\hat{\lambda}h}^x v(h, x) - u(h, x) dx \right| \leq 4\|f''\|_\infty h \max \left\{ \left( \sup_T u - \inf_T u \right)^2, \left( \sup_T v - \inf_T v \right)^2 \right\}.$$

DIM. Dal fatto che  $u, v$  risolvono il problema di Cauchy abbiamo che  $v(0) \equiv u(0)$ . Per la disuguaglianza triangolare allora

$$\begin{aligned} \left| \int_{a+\hat{\lambda}h}^x v(h, x) - u(h, x) dx \right| &\leq \left| \int_{a+\hat{\lambda}h}^x v(h, x) - v(0, x - \lambda h) dx \right| \\ &\quad + \left| \int_{a+\hat{\lambda}h}^x u(h, x) - u(0, x - \lambda h) dx \right|. \end{aligned}$$

Si ha subito la tesi applicando il Lemma 3.3.9 nel trapezio di base  $a' = a$ ,  $b' = x + \hat{\lambda}h$ , contenuto in  $T$ .  $\square$

Passiamo ora alla dimostrazione del teorema principale.

DIM. (Teorema 3.3.2) Indichiamo con  $u(t, x; \bar{u}) = s_t(\bar{u})$  il semigruppato dalle soluzioni entropiche. Ricordiamo che i due flussi

$$t \mapsto u(t), \quad t \mapsto v(t)$$

sono lipschitziani rispetto al tempo nella norma di  $L^1$ , quindi anche rispetto a  $\|\cdot\|$ . La lipschitzianità del flusso entropico in questa norma rispetto al dato iniziale è invece stata osservata nel Corollario 3.1.10. Sono soddisfatte allora le ipotesi del Lemma del Semigruppato (3.3.3).

Per ottenere la tesi è sufficiente allora mostrare il limite

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\sup_x |f^x[v(t+h) - s_h v(t)]|}{h} = 0 \quad \text{per q.o. } t. \quad (3.3.3)$$

A tale scopo si ripercorre una dimostrazione analoga data per una classe di sistemi strettamente iperbolici ([3], Cap. 9.3).

Osserviamo che  $u, v$  sono funzioni BV in due variabili (Lemma 3.1.1). Per la struttura delle soluzioni BV ([6], Teorema 1.8.2) abbiamo allora che per quasi ogni tempo  $v$  ha solo punti di continuità approssimata o di salto approssimato. Questi sono i tempi per cui vogliamo dimostrare il limite (3.3.3). Fissiamo uno di questi istanti e per semplicità cambiamo le notazioni in modo che questo risulti l'istante  $t = 0$ .

Grazie all'ipotesi  $\text{TV}(u(0)) \leq 1$ , comunque scelto  $\varepsilon > 0$ , possiamo partizionare  $\mathbb{R}$  in un numero finito di intervalli contigui  $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , in modo che sia

$$\text{TV}(v(0); I_j) \leq \frac{\varepsilon}{C}. \quad (3.3.4)$$

Il numero  $n$  di intervalli sarà  $\leq \frac{C}{\varepsilon}$ . Scegliamo ora  $\hat{\lambda} > \|f'\|_\infty$  e dividiamo per tempi piccoli l'integrale (3.3.3) nelle regioni di intersezione con i trapezi

$$T_j = \{(x, t) : x_{j-1} + \hat{\lambda}t < x < x_j - \hat{\lambda}t\}$$

e con i coni

$$C_j = \{(x, t) : x_j - \hat{\lambda}t \leq x \leq x_j + \hat{\lambda}t\};$$

il primo e l'ultimo trapezio si intendono infiniti nella variabile spaziale.

Fissato ciascuno dei coni  $C_j$ , per il Lemma 3.3.8 abbiamo che esiste  $h_j^c > 0$  tale che per  $h < h_j^c$  se  $x$  appartiene al cono vale

$$\frac{1}{h} \left| \int_{-\infty}^x v(h) - s_h v(0) \right| \leq \varepsilon.$$

Consideriamo ora i trapezi. Negli intervalli aperti  $I_j$  abbiamo richiesto  $\text{TV}(v(0); I_j) \leq \frac{\varepsilon}{C}$ . Grazie all'ipotesi (3.3.1) sarà allora

$$\begin{aligned} \sup_{(x,t) \in T_j} v(t, x) - \inf_{(x,t) \in T_j} v(t, x) &\leq C \left( \sup_{x \in [x_{j-1}, x_j]} v(0, x) - \inf_{x \in [x_{j-1}, x_j]} v(0, x) \right) \\ &\leq C \text{TV}(v(0); I_j) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Esattamente la stessa disuguaglianza vale per  $v$ : essendo entropica soddisfa la condizione di regolarità (Osservazione 3.3.1). Per il Corollario 3.3.10 abbiamo allora che per ogni  $j = 1, \dots, n$  esiste  $h_j^t > 0$  tale che per  $h < h_j^t$  vale la stima

$$\left| \int_{x_j + \hat{\lambda}h}^x v(h) - s_h v(0) \right| \leq 4 \|f''\|_{\infty} \varepsilon^2 h$$

per ogni  $x$  nel trapezio  $T_j$ . Da questa allora, se inoltre  $h < h_j^c$ , abbiamo

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \left| \int_{-\infty}^x v(h) - s_h v(0) \right| \\ &\leq \frac{1}{h} \left| \int_{-\infty}^{x_{j-1} + \hat{\lambda}h} v(h) - s_h v(0) \right| + \frac{1}{h} \left| \int_{x_{j-1} + \hat{\lambda}h}^x v(h) - s_h v(0) \right| \\ &\leq \varepsilon + 4 \|f''\|_{\infty} \varepsilon^2 < 2\varepsilon, \end{aligned}$$

per  $\varepsilon$  piccolo. Abbiamo allora mostrato che per  $h < \min\{h_j^c, h_j^t\}_{j=1, \dots, n}$  vale

$$\frac{1}{h} \left| \int^x [v(t+h) - s_h v(t)] \right| < 2\varepsilon \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R},$$

quindi la tesi. □

**Osservazione 3.3.11** *Si osserva che l'ipotesi di regolarità qui richiesta, (3.3.1), è più debole di quelle assunte nell'analogia dimostrazione per una classe di sistemi strettamente iperbolici ([3], Cap: 9.3).*



# Ringraziamenti

I miei primi ringraziamenti non possono che essere per il mio relatore, il prof. Stefano Bianchini. Lo ringrazio per avermi dato la possibilità di studiare questi argomenti sotto la sua direzione. Lo ringrazio per il tempo, molto, che mi ha dedicato, per la pazienza nel discutere e aspettare che capissi.

Diversi professori e ricercatori delle due Università — del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Trieste e dei settori di Fisica Matematica e Analisi della SISSA — si sono impegnati in prima persona in questo percorso formativo in comune, con diversi ruoli. Li ringrazio per aver reso piacevole e proficua questa importante esperienza.

Mi rallegro inoltre nel ricordare gli ambienti del Dipartimento di Matematica dell'Università degli Studi di Milano: il mio precedente relatore, gli altri professori e i miei numerosi compagni di corso. Senza un'esperienza così positiva il mio interesse per la matematica non so quanto avrebbe continuato ad ardere.

Ho avuto così tante buone parole e sorrisi in questi due anni, da volti molto o poco vicini, che preferisco omettere l'elenco dei loro proprietari. A loro chiedo scusa: conoscendomi sapranno che ne sono comunque molto grata, spero siano indulgenti.



# Bibliografia

- [1] A. Bressan, P. Baiti. Lower semicontinuity of weighted path length in BV. *Geometrical Optics and Related Topics*, pages 31–58, 1997. F. Colombini e N. Lerner Eds., Birkhauser.
- [2] A. Bressan. Hyperbolic systems of conservation laws in one space dimension. Note.
- [3] Alberto Bressan. *Hyperbolic systems of conservation laws, the one-dimensional cauchy problem*. Oxford University Press, 2000.
- [4] S. Bianchini, A. Bressan. On a Lyapunov Functional Relating Shortening Curves and Viscous Conservation Laws. *Nonlinear analysis, theory, methods & applications*, 51:649–662, 2002.
- [5] Haïm Brezis. *Analisi Funzionale*. Liguori Editore, 1986.
- [6] Constantine M. Dafermos. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*. Berlin Springer-Verlag, 2005.
- [7] Camillo De Lellis, Felix Otto, and Michael Westdickenberg. Minimal entropy condition for Burgers equation. *Quart. Appl. Math.*, 62(4):687–700, 2004.
- [8] Joseph L. Doob. *Measure theory*. Berlin Springer-Verlag, Graduate texts in mathematics, 1994.
- [9] Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. Providence, R.I. American Mathematical Society, 1998.

- [10] Peter D. Lax. *Functional analysis*. New York Wiley, 2002.
- [11] M. G. Crandall, P.-L. Lions. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Trans. America Math. Society*, 277:1–42, 1983.
- [12] O. A. Oleinik. Discontinuous solutions of nonlinear differential equations. *AMS Transl.*, 26:1155–1163, 1963.
- [13] Luigi Ambrosio, Nicola Fusco, Diego Pallara. *Functions of bounded variation and free discontinuity problems*. Oxford Clarendon Press, 2000.
- [14] Royden. *Real Analysis*. Englewood Cliffs, NJ Pearson Education Limited, 1988.
- [15] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. New Delhi Tata McGraw-Hill, 1983.
- [16] Walter Rudin. *Functional analysis*. New York McGraw-Hill, 1991.
- [17] Laurent Schwartz. *Thorie des distributions*. Paris Hermann, 1966.
- [18] Piermarco Cannarsa, Carlo Sinestrari. *Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations and optimal control*. Boston Birkhauser, 2004.
- [19] Kruzhkov S.N. First Order quasilinear equations with several space variables. *Math USSR Sb.*, 10:217–243, 1970.
- [20] Villani. *Topics in Optimal Transportation*. Providence, RI American Mathematical Society, AMS, Graduate Studies in Mathematics vol. 58, 2003.
- [21] Pavnov E. Y. Uniqueness of the Cauchy peroblem for a first order quasi-linear equation with one admissible strictly convex entropy. *Math. Notes*, 55:517–525, 1994.